

AGNAGN ゼミ

chapter 6. ガス星雲内部の力学 6.1-6.5

菊地泰輝

7月4日

6.1 導入

これまで、**静的な** ガス星雲について議論してきた。
この章では**流体力学**を用いて、(主に膨張の) **時間発展**を記述する。

- 物質型: AGN, 超新星 (真空への膨張)
- 電離型: HII 領域 (電離光源による膨張)

内容

- (時間依存の) 流体力学, 電離方程式の基礎
- 真空への自由膨張
- 衝撃波
- 電離前線
- 膨張する HII 領域の力学

6.2 流体の運動方程式

- **ラグランジュ**座標系: 流体要素と共に動く座標系.
- **オイラー**座標系: 動かず、固定されたある一点で見る座標系.

任意の物理量 f について, ラグランジュ座標における時間微分 D/Dt は

$$\frac{Df}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{ある点}} + \underbrace{u \cdot \nabla f}_{\text{移流}} \quad (1)$$

移流: ある領域に流れ込む物質の流れによる変化.
1次元の系では, 次のように簡単になる.

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2)$$

6.2 運動量の方程式

流体における運動方程式を考える.
ラグランジュ座標での運動方程式は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (\text{流体要素への力}) \quad (3)$$

考えうる力

- 圧力勾配 $-\nabla P$
- 重力 $-\rho \nabla \phi$ (ϕ : 重力ポテンシャル)
- 粘性 $\nabla \cdot \sigma$ ($(\sigma)_{ij} = \sigma_{ij}$: 粘性応力テンソル)
- ローレンツ力 $q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ (q : 電荷密度)

6.2 運動量の方程式

多くの場合, 粘性とローレンツ力は無視できる. 従って

運動量の方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P - \rho \nabla \phi \quad (4)$$

1次元の流れの場合は,

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5)$$

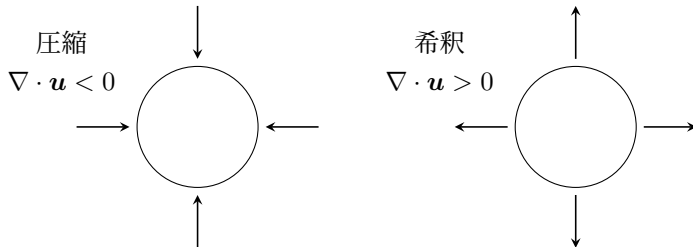
強力な磁場 $\mathbf{B}$ を持つ星雲の場合は, ローレンツ力 $q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ を単に無視するのは正しくない.

6.2 連続の式

質量保存則 (連続の式)

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (6)$$

この式の右辺は圧縮 (または膨張による希釈) の効果を表している。



以降, $\propto -\nabla \cdot \mathbf{u}$ のような項を, “**希釈項**” と呼ぶ。

6.2 連続の式

1次元の系では

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

となり, 次のようにオイラー座標での記述に書き直せる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{連続の式}) \quad (9)$$

こちらの表現の方が eq(6) より馴染みがあるかもしれない.

6.2 エネルギー方程式

静的な星雲の場合は、熱のつり合いは次のようになっていた。

$$G = L_R + L_{FF} + L_C \quad (10)$$

ここで、 G ：星によるエネルギー注入， L ：再結合，自由-自由放射，輝線によるエネルギー損失。

これを、動的な場合に一般化する。

熱力学第 1 法則によって

$$dU = \bar{d}Q + \bar{d}W \quad (11)$$

$$VdU = V(G - L)dt - PdV \quad (12)$$

$(G - L)dt$ は正味の加熱を表している。また、ここで (単位体積あたりの) 内部エネルギーは次のようにも表せる。

$$U = \sum_j \frac{3}{2} n_j k_B T \quad (13)$$

6.2 エネルギー方程式

$VdU = V(G - L)dt - PdV$ を Vdt で割り, ラグランジュ座標で記述すれば

$$\frac{DU}{Dt} = (G - L) - P\nabla \cdot \mathbf{u} - \underbrace{U\nabla \cdot \mathbf{u}}_{\text{希釈}} \quad (14)$$

ここで $\frac{dV}{dt} = V\nabla \cdot \mathbf{u}$ という関係を用いた. 右辺の最後の項 $-U\nabla \cdot \mathbf{u}$ は希釈による効果を表している (eq(6) との類推).

質量の保存 $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u}$ を用いることで, 仕事の項は

$$-P\nabla \cdot \mathbf{u} = -P \times \left(-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (15)$$

となり, 従って

エネルギー方程式

$$\frac{DU}{Dt} = \underbrace{(G - L)}_{\text{加熱}} + \underbrace{\frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\text{仕事}} - \underbrace{U\nabla \cdot \mathbf{u}}_{\text{希釈}} \quad (16)$$

6.2 エネルギー方程式

1 次元の系では

$$\frac{DU}{Dt} = (G - L) + \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - U \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} = (G - L) + \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - U \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(Uu)}{\partial x} = (G - L) + \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (19)$$

- この表現で左辺は、連続の式の左辺 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$ と対応している.
- しかし, U は保存量ではないから右辺 (加熱と仕事) が存在する.

6.2 エネルギー方程式のより基本的な形式

単位質量あたりの内部エネルギー $E = U/\rho$ について時間発展を考えることも重要である.

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{U}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{DU}{Dt} + U \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{Leibniz rule}) \quad (20)$$

エネルギー方程式 (16) を代入: $\frac{DU}{Dt} = (G - L) + \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - U \nabla \cdot \mathbf{u}$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{G - L}{\rho} + \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{U}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + U \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (21)$$

$$= \frac{G - L}{\rho} - P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{U}{\rho^2} \left[\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{D\rho}{Dt} \right] \quad (22)$$

$$= \frac{G - L}{\rho} - P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\because (6)) \quad (23)$$

6.2 エネルギー方程式のより基本的な形式

エネルギー方程式 (基本的な形式)

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{G - L}{\rho} - P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (24)$$

この式は熱力学第1法則から**直接的 (直感的)**に導くことができる。
体積 V , 質量 M のある領域とその一部分 (体積 V/M) を考える。

$$dU = \bar{d}Q + \bar{d}W \quad (25)$$

$$d(VU) = (G - L)Vdt - PdV \quad (\text{領域全体}) \quad (26)$$

$$d\left(\frac{VU}{M}\right) = \frac{(G - L)Vdt}{M} - Pd\left(\frac{V}{M}\right) \quad (\text{一部分}) \quad (27)$$

両辺を dt で割り, $M/V = \rho$ を導入することで次を得る。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G - L}{\rho} - P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (28)$$

6.2 エネルギー方程式についてのコメント & クイズ

2つの形式のエネルギー方程式について説明してきた.

- eq(24) は熱力学第 1 法則と置き換え $d/dt \rightarrow D/Dt$ によって導かれる.
- eq(24) は, 連続の式を使うことなく導出できた.
- 従って, eq(16) を eq(24) から導く方がより論理的である.

クイズ!

U についてのエネルギー方程式 (eq(16)) は希釈項 $-U\nabla \cdot \mathbf{u}$ を右辺に持っている. しかし, より基本的な形式である (eq(24)) は $-E\nabla \cdot \mathbf{u}$ のような項を持たない. これはなぜか?

6.2 電離方程式の導入

ある原子: X , その i 階電離 X^{+i} とする.

Chapter 2 によれば, X^{+i} と X^{+i+1} の間の電離平衡は

$$(\text{光電離}) = (\text{再結合}) \quad (29)$$

$$\underbrace{n(X^{+i}) \int_{\nu_i}^{\infty} \frac{4\pi J_{\nu}}{h\nu} a_{\nu}(X^{+i}) d\nu}_{X^{+i} \rightarrow X^{+i+1}} = \underbrace{n(X^{+i+1}) n_e \alpha(X^{+i}, T)}_{X^{+i+1} \rightarrow X^{+i}} \quad (30)$$

ここで

$a_{\nu}(X^{+i})$: 光電離の断面積,

$\alpha(X^{+i}, T)$: 再結合断面積.

そこでこの方程式を動的な系へ一般化する.

6.2 電離方程式

ここでは $n(X^{+i})$ の時間発展を考えよう.

此度は, X^{+i}, X^{+i+1} だけでなく, X^{+i-1} も考慮に入れる.

電離方程式

$$\begin{aligned} \frac{Dn(X^{+i})}{Dt} = & -\text{pho}(X^{+i}) + \text{rec}(X^{+i+1}) - \text{rec}(X^{+i}) + \text{pho}(X^{+i-1}) \quad (31) \\ & - n(X^{+i}) \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

ここで,

$$\text{pho}(X^i) = n(X^i) \int_{\nu_i}^{\infty} \frac{4\pi J_{\nu}}{h\nu} a_{\nu}(X^i) d\nu \quad (32)$$

$$\text{rec}(X^i) = n(X^i) n_e \alpha_A(X^{i-1}, T) \quad (33)$$

希釈項 $-n(X^{+i}) \nabla \cdot \mathbf{u}$ を忘れてはならない.

6.2 応用例: 膨張する HII 領域

膨張する HII 領域.

$X = \text{H}$, $i = 0$ を電離方程式に代入することで

$$\frac{Dn(\text{H}^0)}{Dt} = \frac{\partial n(\text{H}^0)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n(\text{H}^0) \quad (34)$$

$$= -\text{pho}(\text{H}^0) + \text{rec}(\text{H}^+) - n(\text{H}^0) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (35)$$

$$\frac{\partial n(\text{H}^0)}{\partial t} = -\text{pho}(\text{H}^0) + \text{rec}(\text{H}^+) - \nabla \cdot [n(\text{H}^0) \mathbf{u}] \quad (36)$$

この式を HII 領域全体に亘って積分する.

$$\int \frac{\partial n(\text{H}^0)}{\partial t} dV = - \int \text{pho}(\text{H}^0) dV + \int \text{rec}(\text{H}^+) dV - \int \nabla \cdot [n(\text{H}^0) \mathbf{u}] dV \quad (37)$$

HII 領域では, 光電離と再結合のタイムスケールが力学時間よりも遥かに小さいので, $\frac{\partial n(\text{H}^0)}{\partial t} = 0$ を仮定することができる.

$$\int n(\text{H}^0) \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_{\nu}}{h\nu} a_{\nu}(\text{H}^0) d\nu dV = \int n_p n_e \alpha_A(\text{H}^0, T) dV - \int \nabla \cdot [n(\text{H}^0) \mathbf{u}] dV \quad (38)$$

6.2 応用例: 膨張する HII 領域

on-the-spot 近似を用いる ($J_\nu \rightarrow J_{\nu,\text{stellar}}, \alpha_A \rightarrow \alpha_B$).

$$\Phi(H^0) = \int n_p n_e \alpha_B(H^0, T) dV - \int \nabla \cdot [n(H^0) \mathbf{u}] dV \quad (39)$$

ここで, $\Phi(H^0)$ は中心星からの電離光子の総注入量である.

$$\Phi(H^0) := \int n(H^0) \int \frac{4\pi J_{\nu,\text{stellar}}}{h\nu} a_\nu(H^0, T) d\nu dV \quad (40)$$

右辺第 2 項

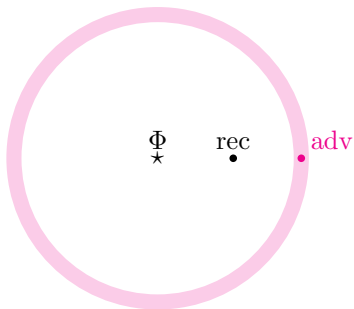
$$\int \nabla \cdot [n(H^0) \mathbf{u}] dV = \int_S n(H^0) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{S: HII 領域の境界}) \quad (41)$$

6.2 応用例: 膨張する HII 領域

HII 領域に対する電離方程式の最終的な結果は,

$$\Phi(H^0) = \underbrace{\int n_p n_e \alpha_B(H^0, T) dV}_{\text{再結合}} - \underbrace{\int_S n(H^0) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{移流}} \quad (42)$$

この様子を図示する.



6.2 応用例: 再結合線の境界での減光

典型的な値

- $\Phi(\text{H}^0) = 2 \times 10^9 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
- $n = 10 \text{cm}^{-3}$
- $u = 20 \text{km s}^{-1}$

これらによると

$$\frac{\text{Advection}}{\Phi(\text{H}^0)} \simeq 0.01 \quad (43)$$

従って, HII 領域の境界では, 再結合線の輝度が 1%ほど減少する. これは移流項に電離光子が取られるためである.

6.2 注意!

教科書中の式 (6.13) はやや混乱を招く.

$$\Phi(H^0) = \int [n_e n_p \alpha_B + \mathbf{u} \cdot \nabla n] dr \simeq \int n_e n_p \alpha_B dr + n(H^0) u \quad (6.13)$$

第1項(再結合)は我々の結果と同じだが, 第2項は符号が異なっている. これは視点が異なっていることが原因である.

我々の移流項は1次元の系では

$$- \int_S n(H^0) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = -n(H^0) u_r =: n(H^0) u'_r \quad (44)$$

ここで u_r は外側に向かう速度で, u'_r は内向きに進む速度である.

教科書は HII 領域の外側にある H^0 が内側に流れ込むという視点のもとで u として u'_r を採用し, HII 領域が膨張する際に正になるように符号を取り直している.

6.2 状態方程式

状態方程式

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_{\text{H}}} = n_{\text{total}} k T \quad (45)$$

極限での単純な状態

- 等温: HII 領域において, T が加熱と冷却によって決まる場合.
- 断熱:

$$P = K \rho^{\gamma} \quad (46)$$

6.2 定常状態極限

定常状態極限 $\partial/\partial t = 0$ を考える.

連続の式

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi := \rho u \text{ が保存される.} \quad (47)$$

運動量の式 (重力は無視)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (48)$$

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (49)$$

$$= 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - u\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\because \text{連続の式}) \quad (50)$$

を用いることで次を得る.

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \Pi = P + \rho u^2 = \rho c^2 + \rho u^2 \quad (51)$$

ここで, $c = (\gamma kT/\mu m_H)^{1/2}$ は音速.

6.2 定常状態極限

1次元の運動量の方程式 (重力は無視) は

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (52)$$

系が断熱的 ($P = K\rho^\gamma$) であったなら, 定常状態は

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} = -K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (53)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -K\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial (K\rho^{\gamma-1})}{\partial x} \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (55)$$

従って,

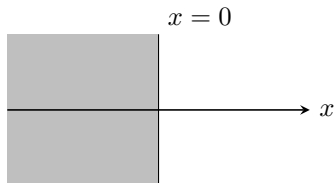
$$H = \underbrace{\frac{1}{2} u^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}}_{\text{エンタルピー}} \quad (56)$$

が保存する. この式はエネルギー方程式の代わりに使える.

6.3 真空への自由膨張

設定: $x < 0$ で $u = 0, \rho = \rho_0, P = P_0$ であり, $x > 0$ は真空.

$t = 0$ において, 壁 $x = 0$ が取り払われて $x < 0$ にあった気体が $x > 0$ へ膨張し始める.



質量, 運動量の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (57)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (58)$$

また, ここでは断熱的な理想気体を仮定する.

$$P = K \rho^\gamma, \quad c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} \quad (59)$$

6.3 リーマン不変量の導出

$$2cdc = d\left(\gamma \frac{P}{\rho}\right) = \frac{\gamma}{\rho} dP - \frac{\gamma P}{\rho^2} d\rho = \frac{\gamma}{\rho} c^2 d\rho - \frac{c^2}{\rho} d\rho = c^2(\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho} \quad (60)$$

$$\therefore \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{dc}{c} \quad (61)$$

この関係式を質量保存則に代入すると,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\gamma - 1} c \right) + c \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma - 1} c \right) = 0 \quad (63)$$

さらに eq(61) を運動量保存則に代入する.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma - 1} c \right) \quad (64)$$

6.3 リーマン不変量

eq(63) $\pm$ eq(64) を計算してみると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u \pm \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u \pm \frac{2}{\gamma - 1} c \right) = 0 \quad (65)$$

そこで, $J_{\pm}$ (リーマン不変量) を定義する.

$$J_{\pm} := u \pm \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad \frac{\partial J_{\pm}}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial J_{\pm}}{\partial x} = 0 \quad (66)$$

J_+ は速度 $u + c$ で $x > 0$ に向かって輸送される. その間は J_+ の値は一定である. 従って, 次が成り立つ.

$$J_+ = u + \frac{2}{\gamma - 1} c = 0 + \frac{2}{\gamma - 1} c_0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{2}{\gamma - 1} (c_0 - c) \quad (67)$$

膨張の端 (前線) では, $c = 0$ が満たされる ($\because$ 真空と接しているため).

$$(\text{前線の速度}) : \quad u_e = \frac{2}{\gamma - 1} c_0 \quad (68)$$

6.3 真空への自由膨張

真空へ自由膨張する雲：超新星, AGNs

球対称な系では単に $x \rightarrow r$ と置き換えれば良い.

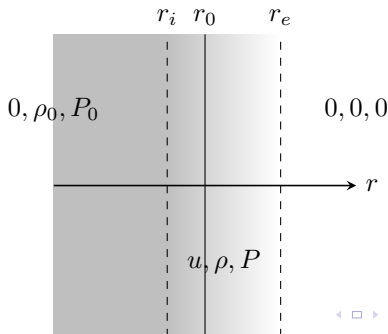
後の時刻 t において, 外側の端 (前線) は位置 r_e に到達する.

$$r_e = r_0 + u_e t \quad (69)$$

一方で希薄波は r_i に到達する.

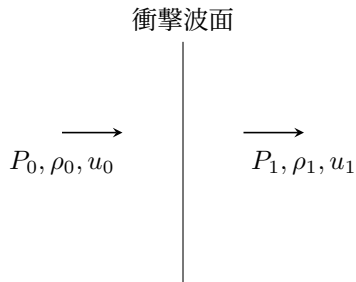
$$r_i = r_0 - ct \quad (70)$$

速度は 0 (at r_i) から u_e (at r_e) へ増加する.



6.4 衝撃波

衝撃波面と共に動く座標系で考える.



保存則は

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 \quad (71)$$

$$P_0 + \rho_0 u_0^2 = P_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (72)$$

$$\frac{1}{2} u_0^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} \quad (73)$$

6.4 ランキン-ユゴニオ関係

マッハ数 M を導入する.

$$M = \frac{|u_0|}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma k T_0}{\mu m_H}} : \text{音速} \quad (74)$$

保存量を使うことによって, 比 $P_1/P_0, \rho_1/\rho_0$ を M のみによって表示することができる.

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (75)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2} \quad (76)$$

強衝撃波の極限 $M \rightarrow \infty$ では, $\frac{\rho_1}{\rho_0} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 4$ (断熱の場合).

6.4 等温衝撃波 (0 次近似)

典型的な星雲, HII 領域:

$$(\text{放射のタイムスケール}) \ll (\text{希釈のタイムスケール}) \quad (77)$$

従って, 0 次近似の範囲では,

- 衝撃波面のちょうど下流の領域は高い温度を持つ ($T_0 \rightarrow T$).
- しかし即座に放射によって冷却され、元の温度に戻る ($T \rightarrow T_0$).
- そのため, このような系は等温とみなすことができる.

数学的には, 比 $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ は単に $\gamma \rightarrow 1$ (等温: $P = nkT$) という極限を取ることで得られる.

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = M^2 \quad (78)$$

6.5 電離光子流束

電離前線: ρ, u, P だけでなく, 電離度も不連続に変化する.

そこで, $\phi(\text{H}^0)$ という基本的な概念を導入しよう.

質量流束はこの電離光子流束 ($\phi_i = \phi(\text{H}^0)$) によって次のように表される:

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 = m_i \phi_i \quad (79)$$

ここで

$$\phi(\text{H}^0) = \frac{Q(\text{H}^0)}{4\pi r^2} = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_{\nu}}{h\nu} d\nu, \quad (\pi F_{\nu} : \text{星からのエネルギー流束}) \quad (80)$$

であり, m_i : 電子-イオンのペアの質量である.

6.5 膨張する電離前線

ここで、膨張する電離前線の力学を定式化する。

式 (42) に登場する **移流項は無視できる** と仮定し、前線の下流は **完全に電離している** とする。

前線内部の HII の総数は単に次のようにすれば良い。

$$N(t) = \frac{4\pi}{3} r^3(t) n, \quad r(t) : \text{電離前線} \quad (81)$$

そしてその時間発展は

$$\frac{dN(t)}{dt} = \underbrace{Q(\text{H}^0)}_{\text{電離}} - \underbrace{\int_V n_e n_p \alpha_B dV}_{\text{再結合}} \quad (82)$$

$n_e \simeq n_p =: n$ であるので、再結合の項はおよそ $n^2 \alpha_B \frac{4\pi}{3} r^3(t)$ である。

結果的に、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} r^3 n \right) = Q(\text{H}^0) - n^2 \alpha_B \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (83)$$

6.5 膨張する電離前線

$$4\pi r^2 n \frac{dr}{dt} = Q(H^0) - n^2 \alpha_B \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (84)$$

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{Q(H^0)}{4\pi r^2 n} - \frac{\alpha_B n r}{3} \quad (85)$$

これが電離前線の膨張速度である。

両辺に $3r^2$ を乗じることによって解 $r(t)$ が解析的に求まる。

$$\frac{d}{dt} r^3 = \frac{3Q(H^0)}{4\pi n} - \alpha_B n r^3 \quad (86)$$

これは最も有名な常微分方程式であり, その解は次のように与えられる。

$$r^3(t) = \frac{3Q(H^0)}{4\pi \alpha_B n^2} [1 - \exp(-\alpha_B n t)] \quad (87)$$

注意! : 教科書では 4π が現れないが、これは間違いだと思われる。

6.5 エネルギー超過: エネルギー方程式の代替

(単位質量あたりの) 運動エネルギーの超過 $q^2/2$ を導入する.

$$\frac{1}{2}m_i q^2 = \frac{1}{\phi_i} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_{\nu}}{h\nu} (h\nu - h\nu_0) d\nu \quad (88)$$

$q^2/2$ を用いると, エネルギー方程式の代替は

$$\frac{1}{2}u_0^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \quad (89)$$

左辺の $\frac{1}{2}q^2$: 光電離によるエネルギー供給での超過分.

cf) eq(73)

6.5 等温衝撃波に対する1次補正

$\frac{1}{2}q^2$ という追加の項によって、電離前線の下流の温度は上流の温度とは異なる。

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{kT_0}{\mu_0 m_H}, \quad \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{kT_1}{\mu_1 m_H} \quad (90)$$

ここで

$$T_0 \ll T_1, \quad \mu_0 \simeq 1, \mu_1 \simeq \frac{1}{2} \quad (91)$$

結果として、補正したランキン-ユゴニオ関係は

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{c_0^2 + u_0^2 \pm [(c_0^2 + u_0^2)^2 - 4c_1^2 u_0^2]^{1/2}}{2c_1^2} \quad (92)$$

6.5 R, D 前線

物理的には $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ は実数でなくてはならない ($(c_0^2 + u_0^2)^2 - 4c_1^2 u_0^2 \geq 0$). 従って,

$$u_0 \geq c_1 + \sqrt{c_1^2 - c_0^2} =: u_R \simeq 2c_1 \quad (93)$$

または

$$u_0 \leq c_1 - \sqrt{c_1^2 - c_0^2} =: u_D \simeq \frac{c_0^2}{2c_1} \quad (94)$$

添字 R, D はそれぞれ”希薄”と”密”の略である.

- R 前線: 希薄な気体が超音速 ($u_R \gg c_0$) で動き, H^0 (前線の上流) へ進んでゆく.
- D 前線: 密な気体が亜音速で動く ($u_0 < u_D < c_0$).

6.5 R 前線

無限に一様に H^0 が広がる雲の中に、熱い星が突如”現れた”とすると、はじめに速度が速い R 前線が走る.

よって, $u_0 \gg c_1 (\gg c_0)$ を仮定しよう.

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \simeq \frac{u_0^2 \pm [u_0^4 - 4c_1^2 u_0^2]^{1/2}}{2c_1^2} \quad (\because c_0^2 \simeq 0) \quad (95)$$

$$\simeq \frac{u_0^2}{2c_1^2} \left[1 \pm \left(1 - 2\frac{c_1^2}{u_0^2} - \frac{c_1^4}{u_0^4} \right) \right] \quad (96)$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{u_0^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{c_1^2}{u_0^2} \right) \gg 1 & (\text{強}) \\ 1 + \frac{c_1^2}{2u_0^2} \simeq 1 & (\text{弱}) \end{cases} \quad (97)$$

強い R 前線の下流では、密度は遥かに大きくなる (強く圧縮される).

6.5 R 前線

質量保存則 $\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$ を使うと, u_1 を計算できて

$$u_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} u_0 = \begin{cases} \frac{c_1^2}{u_0} \ll c_1 & (\text{強}) \\ u_0 \gg c_1 & (\text{弱}) \end{cases} \quad (98)$$

従って, 強い/弱い R 前線の下流の速度 u_1 は超/亜 音速である.

しかしながら, 強い R 前線は**自然では存在することができない**. なぜならば,

- 速度 u_1 は音速 c_1 よりも遥かに小さい.
- もし摂動が加われば, 音波が発生しガスを前線に再び輸送する.
- すると前線は音波によって輸送されたガスによって乱されてしまう.

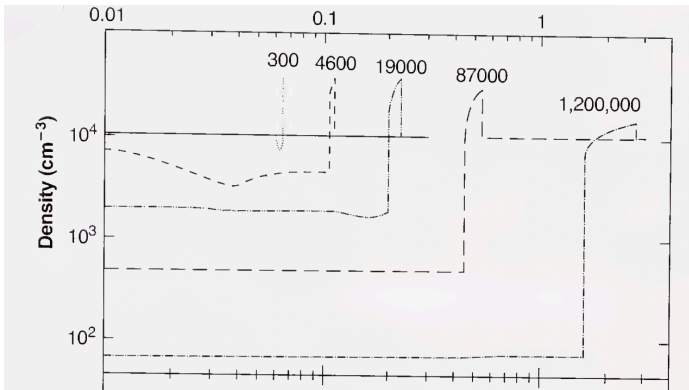
結果的に, 初期成長においては弱い R 前線が主要な衝撃波となる.

6.5 HII 領域の時間発展

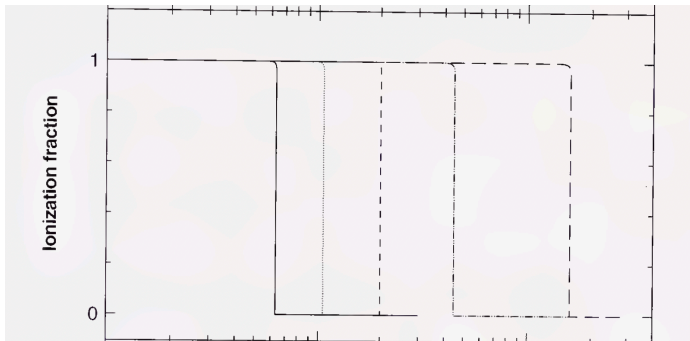
HII 領域の時間発展の全体像

- 初期成長の段階では弱い R 前線が主要な衝撃波である。前線の下流にたくさんの電離光子が存在し、前線は急速に前に押し出される。
- 前線が運動するにつれて、 $r \nearrow$ となり $\phi \searrow$ となった結果、 $u_0 \searrow u_R$ 。そこから先は、R 前線はこれ以上存在することができなくなる。
- その後、衝撃波面と電離前線は切り離され、衝撃波の後を D 電離前線が追う形になる。
- 衝撃波面は徐々に減衰し、強い D 前線のみが残り続ける。D 前線はゆっくりと動き、HII 領域を拡大してゆく。

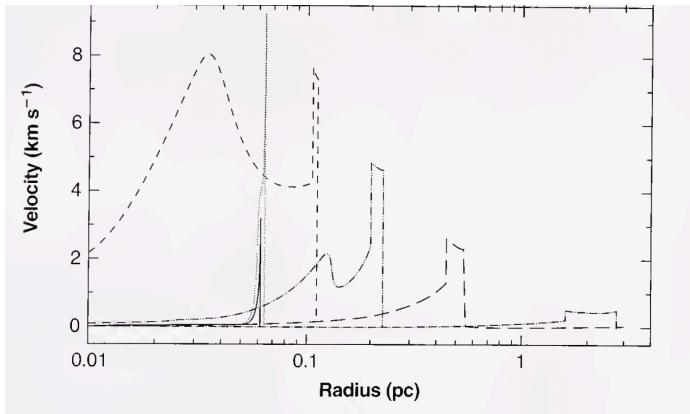
6.5 膨張する HII 領域の数値計算



6.5 膨張する HII 領域の数値計算

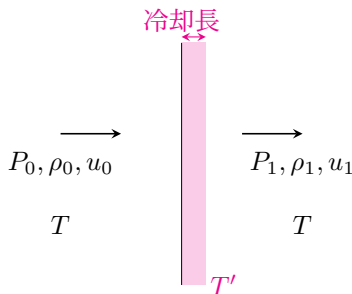


6.5 膨張する HII 領域の数値計算



6.5 HII 領域についての追加コメント

- D 前線の期間における HII 領域内部のガスの運動は重要になる．平衡圧力を達成するために，HII 領域内部のガスの速度は半径によって変化する (図 6.1 を見よ)．
- 電離前線付近では， H^0 の移流によって温度が高くなる．これによって輝線は強められる．
- 冷却長：電子の温度が上がり，ピークとなった後平衡温度まで下がる層の厚さ．



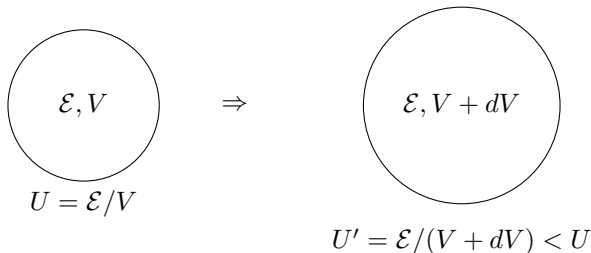
クイズ!の解答

クイズ!

U についてのエネルギー方程式 (eq(16)) は希釈項 $-U\nabla \cdot \mathbf{u}$ を右辺に持っている. しかし, より基本的な形式である (eq(24)) は $-E\nabla \cdot \mathbf{u}$ のような項を持たない. **これはなぜか?**

U : 単位体積あたりの内部エネルギー

ここで, ある流体要素の全エネルギーを $\mathcal{E}$ とする.

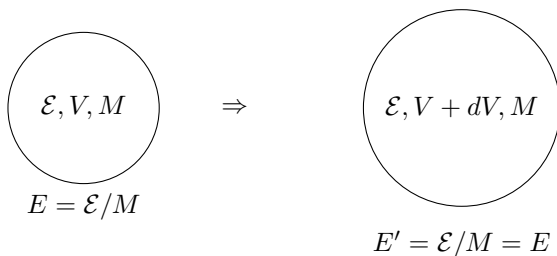


従って, 希釈項 $-U\nabla \cdot \mathbf{u}$ が必要である.

クイズ!の解答

$E = U/\rho$: 単位質量あたりの内部エネルギー
全エネルギー $\mathcal{E}$, 全質量 M とする.

$$E = \frac{U}{\rho} = \frac{\mathcal{E}/V}{M/V} = \frac{\mathcal{E}}{M} \quad (99)$$



膨張 $V + dV$ の効果は打ち消される ($\because U, \rho$ は共に希釈される).