

# 2003 年度 天体物理学演習 III

Ver. 2003-11-7

本原顕太郎

## 演習について

- 自己紹介

専門は赤外線天文学、観測装置開発

居室は三鷹の天文センター 2004 号室

電話：0422-34-5049

メール：kmotohara@ioa.s.u-tokyo.ac.jp

URL：<http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~kmotohara/enshu2003/>

- 内容

- － 天体輻射論I(中田)の演習。とはいえ、それを越えた内容を扱うこともありうる
- － 毎回3問を名簿順にあてていくので、次回までにそれを解き、原則として板書する。あるいは、レジュメを出席者全員に配布してそれを見ながら説明してもよい。
- － 評価は発表状況によって行う。
- － 授業回数の予定：12回+補講1回。日程は以下の通り(休講日は括弧付)。  
(10/7), 10/14, 10/22, 10/28, 11/4, 11/11, 11/18, 11/25, 12/2, 12/9, (12/16),  
1/6, 1/13, 1/20, 1/27

- 参考書

Rybicki, G. B. & Lightman, A. P.

“Radiative Processes in Astrophysics”, 1979, John Wiley & Sons, Inc. (New York)

この本をベースに進める。そのほかに、理科年表なども使う必要があることもあるだろう。追加の参考文献があれば随時アナウンスする。

## 1 電磁波観測の基礎

### 問題 1-1 電磁波による観測

1. 電磁波を波長と周波数によって分類せよ
2. 地上から観測できない波長と、その原因となる素過程を述べよ。
3. 各波長において天文観測に用いられる代表的な検出器の種類とその原理を述べよ。

### 問題 1-2 電磁放射の概念

1. 電磁波について、以下の3つの量の定義を説明せよ。
  - Luminosity ( $L_\lambda$ )
  - Flux ( $F_\lambda$ )
  - Intensity ( $I_\lambda$ )
2. Flux の二つの表式  $F_\nu$  と  $F_\lambda$  の関係を示せ。
3. Luminosity  $100 \text{ W}/\mu\text{m}$  の光源を地球から  $1\text{pc}$  の距離においたとき、地球上  $2\text{m}^2$  に単位時間あたり入射する flux を求めよ。
4. これは  $V$  バンドで何等の天体として観測されるか。ただし、 $V = 0$  等級のフラックスを  $3.44 \times 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2/\mu\text{m}$  とせよ
5.  $V$ -band の中心波長は  $5500\text{\AA}$  である。この時、上記の天体の観測されるフラックスを単位周波数あたりの値で示せ。

### 追加参考文献

- Allen's Astrophysical Quantities

## 2 輻射輸送 (Radiative Transfer)

### 問題 2-1 基礎方程式と光学的厚さ

1. emission coefficient  $j_\nu$  と absorption coefficient  $\alpha_\nu$  の定義を書け。ただし、specific intensity を  $I_\nu$ 、光の進行方向の距離を  $ds$  とする。
2. 輻射輸送の式を書け。さらに、emission のみのとき、および absorption のみにとき  $I_\nu$  はどのように書けるか？
3. Optical depth  $\tau_\nu$  の定義を書け。また、 $\tau_\nu$  と photon の mean free path の関係を書け。
4.  $\tau_\nu$  を使って 2. の輻射輸送の式を書き直し、一般解を求めよ。ただし、 $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$  とせよ。
5.  $S_\nu$  の空間分布が一定だと仮定する。 $\tau \gg 1$ 、 $\tau \ll 1$  のときに 4. の解はどのように書けるか。

### 問題 2-2 Einstein 係数と熱平衡

1. Einstein の A 係数と B 係数の定義をいえ。
2. 上記係数間の関係を示せ。
3. Absorption coefficient  $\alpha_\nu$  と source function  $S_\nu$  を Einstein 係数を用いて表せ。
4. LTE (Local Thermodynamic Equilibrium) とはどのような状態のことを言うのか？
5. Kirchhoff's law を説明せよ。

### 問題 2-3 Radiative Diffusion

1. A spherical blackbody at temperature  $T_C$  is surrounded by a spherical shell of gas, thermally emitting at temperature  $T_S$  ( $< T_C$ ). This shell absorbs in a narrow spectral line at  $\nu_0$ ; that is, the absorption coefficient  $\alpha_\nu$  becomes large at the frequency  $\nu_0$  and negligibly small at other frequencies (Fig. 1.). This object is observed along the rays A and B shown in Fig. 2.

- (a) Write schematic spectra centered at frequency  $\nu_0$  observed along rays A and B.
- (b) Answer the preceding question when  $T_S > T_C$

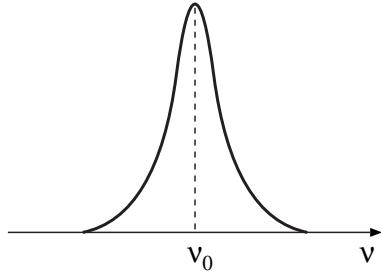


図 1: Absorption coefficient of the material in the shell

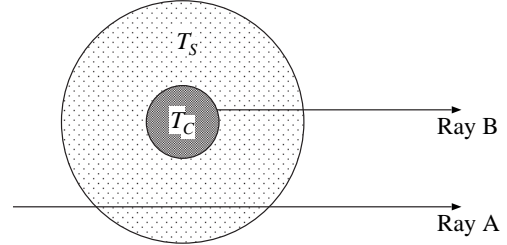


図 2: A schematic of a blackbody emitter surrounded by an absorbing shell, viewed along rays A and B.

2. Plane-parallel が成り立つような温度  $T(z)$  の分布をした媒質中で、Rosseland 近似により flux が

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{dT}{dz}$$

となることを示せ。ここで  $\alpha_R$  は Rosseland mean absorption coefficient である。

3. 一様かつ等温の物質が半無限の空間を満たしている。ただし、散乱は等方的であるとする。このとき、Eddington approximation と two-stream boundary conditions を用いて radiation diffusion equation を解き、mean intensity  $J_\nu(\tau)$ 、表面の flux  $F_\nu(0)$ 、source function  $S_\nu(\tau)$  を求めよ。

### 3 物体からの電磁波放射

#### 問題 3-1 運動する物体からの放射と Dipole 近似

1. Poynting vector の定義と意味を述べよ。
2. 速度  $\mathbf{v}$ 、電荷  $q$  を持つ粒子を距離  $R$ 、角度  $\Theta$  の方向から見たときの poynting vector の強度  $S$  が

$$S = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{R^2 c^4} \sin^2 \Theta$$

となることを導け。ただし、 $|\dot{\mathbf{v}}| \ll c$  であるとする。

3. このとき、単位時間あたり単位立体角あたりに放出されるエネルギー  $dW$  を求めよ。
4. Dipole 近似というのはどのような近似のことを言うのか。また、この近似を 2. の式に当てはめよ。
5. 4. で得た結果のフーリエ変換を考えて、単位周波数あたり、単位立体角あたりに放射されるエネルギーを求めよ。また、この結果を全立体角で積分するとどうなるか。

#### 問題 3-2 サイクロトロン放射

A particle of mass  $m$  and charge  $e$  moves at constant, nonrelativistic speed  $v_1$  in a circle of radius  $a$ .

1. What is the power emitted per unit solid angle in a direction at angle  $\theta$  to the axis of the circle?
2. Describe qualitatively and quantitatively the polarization of the radiation as a function of the angle  $\theta$ .
3. What is the spectrum of the emitted radiation?
4. Suppose a particle is moving nonrelativistically in a constant magnetic field  $B$ . Show that the frequency of circular motion is  $\omega_B = \frac{eB}{mc}$ , and that total emitted power is

$$P = \frac{2}{3} r_0^2 c \left( \frac{v_\perp}{c} \right)^2 B^2$$

and is emitted solely at the frequency  $\omega_B$ . This is a non-relativistic form of synchrotron radiation, and called *cyclotron* or *gyro* radiation.

### 問題 3-3 熱制動放射 (Thermal Bremsstrahlung)

1. 衝突パラメータ  $b$  で電荷  $Z_e$  のイオンを速度  $v$  で通過する電子を考える。この時放出される電磁波の単位周波数あたりのエネルギー  $dW$  を求めよ。
2. イオン密度  $n_i$ 、電子密度  $n_e$ 、電子速度  $v$  のガスの放射する単位周波数あたり、単位体積あたり、単位時間あたりのエネルギー  $dW$  はどう書けるか。
3. 熱制動放射のスペクトルを計算する。電子の速度分布が温度  $T$  の熱平衡にあるとして、2. 同様に  $dW$  を求めよ。

### 問題 3-4 Hot Gas からの X 線熱制動放射

Suppose X-ray emission is received from a source of known distance  $L$  with a flux  $F$  ( $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{s}$ ). The X-ray spectrum has the form of Fig 3. It is conjectured that this X-ray emission is due to bremsstrahlung from an optically thin, hot, plasma cloud, which is in hydrostatic equilibrium around a central mass  $M$ . Assume that the cloud thickness  $\Delta R$  is roughly its radius  $R$ ,  $\Delta R \sim R$ . Find  $R$  and the density of the cloud  $\rho$ , in terms of the known observations and conjectured mass  $M$ . If  $F = 10^{-8}$  ( $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{s}$ ) and  $L = 10$  (kpc), what are the constraints on  $M$  such that the source would indeed be effectively thin (for self-consistency)?

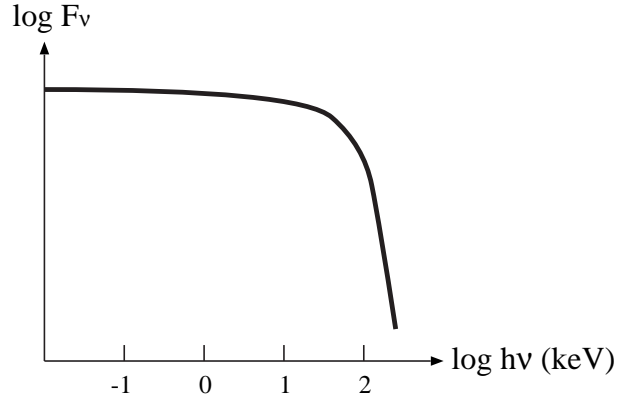


図 3: Observed spectrum from an X-ray source.

## 4 偏光とプラズマ中の電磁波の伝搬

### 問題 4-1 偏光と Stokes Parameters

1. 単色光において、4 つの Stokes Parameters の定義とその意味を説明し、これらが

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

を満たすことを示せ。

2. 準単色光の場合の Stokes Parameters の定義はどうなるか？ また、これらの関係はどうなるか？
3. いかなる準単色光も完全偏光した光と無偏光の光の重ねあわせであり、その偏光度  $\Pi$  が

$$\Pi = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}$$

で表されることを示せ。

### 問題 4-2 プラズマ周波数と Faraday Rotation

1. プラズマ中を電磁波が伝搬するとき、プラズマ周波数

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$$

よりも低い周波数の電磁波が減衰することを示せ。

2. 電磁波が磁場を持ったプラズマを通過すると、偏光面が回転する。この回転角  $\Delta\theta$  が

$$\Delta\theta = \frac{2\pi e^3}{m^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n B_{\parallel} ds$$

であることを示せ。また、どちらの方向に回転するか？

3. The signal from a pulsed, polarized source is measured to have an arrival time delay that varies with frequency as  $\frac{dt_p}{d\omega} = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^2$ , and a Faraday rotation that varies with frequency as  $\frac{d\Delta\theta}{d\omega} = 1.9 \times 10^{-4} \text{ s}$ . The measurements are made around the frequency  $\omega = 10^8 \text{ s}^{-1}$ , and the source is at unknown distance from the earth. Find the mean magnetic field,  $\langle B_{\parallel} \rangle$ , in the interstellar space between the earth and the source :

$$\langle B_{\parallel} \rangle \equiv \frac{\int n B_{\parallel} ds}{\int n ds}$$

## 5 シンクロトロン放射

### 問題 5-1 相対論的荷電粒子からの電磁波輻射

1. 荷電粒子の運動方程式を相対論的に書き下し、説明せよ。
2. Lamor の公式をローレンツ変換することにより、相対論的荷電粒子の出す輻射の全エネルギーを求めよ。
3. 相対論的荷電粒子からの単位立体角あたりのエネルギー輻射率を、加速度が運動方向に垂直な場合と平行な場合について求めよ。また、速度が光速に近い場合、その角度分布はどのようなになるか概略を調べよ。
4. 3. の表式を全立体角にわたって積分すると 2. の結果に帰着することを示せ。

### 問題 5-2 Poynting Robertson Effect

Consider a particle of dust orbiting a star in a circular orbit, with velocity  $v$ . This particle absorbs stellar photons, heats up, and then emits the excess energy isotropically in its rest frame.

1. Show that in absorbing a photon the angular momentum of the particle about the star does not change. (Assume the photons are travelling radially outward from the star.)
2. When the particle emits its radiation, show that the velocity and its direction do not change, but that the angular momentum now decreases by the ratio  $m/m'$  of the rest mass after and before emission. Denoting the angular momenta before and after by  $l_0$  and  $l$ , show that

$$l = l_0 \left( 1 + \frac{2h\gamma\nu}{mc^2} \right)^{-1/2}.$$

3. Having obtained this general result, let us now assume  $v \ll c$  and  $h\nu \ll mc^2$ . By expanding, show that to lowest order the change in angular momentum caused by one photon is

$$\Delta l = \frac{l_0 h\nu}{mc^2}.$$

**Historical Note:** This result, although now for nonrelativistic particles, apparently cannot be derived classically. Attempts to do so by Poynting and others led to results differing from the correct answer by various numerical factors. Robertson resolved the problem in 1937 (MNRAS, **97**, 423), showing that it is a relativistic effect even to lowest order. The above phenomenon is called the *Poynting-Robertson effect*.

4. A dust grain having a mass  $m \sim 10^{-11}(\text{g})$  and cross section  $\sigma \sim 10^{-8}(\text{cm}^2)$  orbits the Sun at 1 A.U. Assuming that it always keeps a circular orbit, find the time for it to fall into the Sun.



### 問題 5-3 シンクロトロン放射とスペクトル

1. 一定磁場  $B$  のある空間内で質量  $m$ 、電荷  $q$  の荷電粒子が超相対論的運動している。このとき、この粒子のみたす運動方程式からその運動を求めよ。また、全エネルギー放射率  $P$  はいくらになるか。

2. 放射のスペクトルが  $\frac{\omega}{\omega_c}$  の関数で表されることを示せ。ここで

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{\gamma^2 q B}{mc} \sin \alpha$$

かつ  $\alpha$  は螺旋運動のピッチ角であるとする。

3. 粒子のエネルギー分布が指数  $p$  のべき乗則に従うとき、放射エネルギーの周波数依存性が

$$-s = -\frac{p-1}{2}$$

のべき乗になることを示せ。

4. シンクロトロン放射の全パワースペクトル  $P(\omega)$  が

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3} q^2 B \sin \alpha}{2\pi m c^2} F(x)$$

であることを示せ。ただし、

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{\frac{5}{3}}(\xi) d\xi$$

であり、 $K_n$  は  $n$  次の変形ベッセル関数である。

5. このような粒子が多数あって、その数分布  $N(E)$  がエネルギー  $E$  のべき乗に比例する場合に、全パワースペクトルはどのように表されるか？
6. シンクロトロン放射の偏光はどのようにになるか？ また、 $N(E) = \delta(E)$  のときと  $N(E) \propto E^s$  の時について偏光度の表式を求めよ。

#### 問題 5-4 シンクロトロン自己吸収

1. 相対論的に運動しているエネルギー分布  $N(E)$  をもつ多数の自由電子がある。この吸収係数  $\alpha_\nu$  を、アインシュタイン係数の関係式を用いて導け。また、 $N(E)$  が熱平衡状態にあるとき  $\alpha_\nu$  はどうなるか。ただし、 $h\nu \ll E$  であるとする。
2. 1. で  $N(E)$  がエネルギー  $E$  のべき乗に比例する場合はどうなるか? また磁場  $B$  が存在する場合に源泉関数  $S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$  を求め、観測されるスペクトルはどのようなようになるかを説明せよ。
3. A spectrum shown in Fig 4 is observed from a point source of unknown distance  $d$ . A model for this source is a spherical mass of radius  $R$  that is emitting synchrotron radiation in a magnetic field of strength  $B$ . The space between us and the source is uniformly filled with a thermal bath of hydrogen that emits and absorbs mainly by bound-free transitions, and it is believed that the hydrogen bath is unimportant compared to the synchrotron source at frequencies where the former is optically thin. The synchrotron source function can be written as

$$S_\nu = A(\text{erg/cm}^2/\text{s/Hz}) \left( \frac{B}{B_0} \right)^{-1/2} \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^{5/2}.$$

The absorption coefficient for synchrotron radiation is

$$\alpha_\nu^S = C(\text{cm}^{-1}) \left( \frac{B}{B_0} \right)^{(p+2)/2} \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-(p+4)/2},$$

and that for bound-free transition is

$$\alpha_\nu^{bf} = D(\text{cm}^{-1}) \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-3},$$

where  $A$ ,  $B_0$ ,  $\nu_0$ ,  $C$  and  $D$  are constants and  $p$  is the power law index for the assumed power law distribution of relativistic electrons in the synchrotron source.

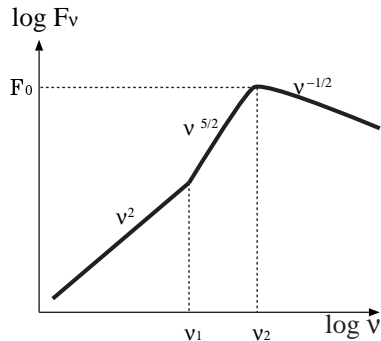


図 4: Observed spectrum from a point source.

- (a) Find the size of the source  $R$  and the magnetic field strength  $B$  in terms of the solid angle  $\Omega = \pi(R^2/d^2)$  subtended by the source and the constants  $A$ ,  $B_0$ ,  $C$  and  $D$ .
- (b) Now using  $D$  and  $\nu_1$ , in addition to the previous constants, find the solid angle of the source and its distance.

### 問題 5-5 チェレンコフ放射・ラジン効果

1. 透磁率  $\mu$ 、誘電率  $\epsilon$  が一定の誘電体内部を等速直線運動する荷電粒子 (電荷  $q$ ) が作る電磁場を求めよ。
2. この電磁場では真空中とは異なり、ある条件では無限遠でも減衰しない成分が現れることを示せ。これをチェレンコフ放射と呼ぶ。
3. 大気中を運動する陽子がチェレンコフ放射を行うのに必要な最低エネルギーを eV 単位で求めよ。
4. 真空中の相対論的荷電粒子からの放射は、 $\theta < 1/\gamma$  程度に集中するビーミング効果が見られる。 $n_r < 1$  のプラズマ中では、この効果が低周波領域で効かなくなること示せ。
5. 4. の影響でシンクロトロン放射に低周波カットオフが起ることを示せ。これをラジン効果と呼ぶ。

## 6 散乱

### 問題 6-1 トムソン散乱・レイリー散乱

以下、電荷の運動は非相対論的であるとする。

1. 質量  $m$  の点電荷  $q$  が静止しているとする。この電荷に直線偏光した単色の平面電磁波 ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ ) が入射したとき、誘起される dipole モーメントを求めよ。
2. この dipole モーメントによって単位時間・単位立体角当りに放射されるパワーの表式を求めよ。また、全立体角で積分するとどうなるか。
3. この過程の微分断面積と断面積を求めよ。また、電荷が電子の場合の断面積 (Thomson 断面積) はいくらになるか?
4. 無偏光の電磁波が入射したとき、微分断面積と断面積はどうなるか? また、散乱された電磁波の偏光はどのようなになるか?
5. 電荷が固有振動数  $\omega_0$  の調和振動子として束縛されているとき、同様の議論によって断面積を求めよ。また  $\omega \ll \omega_0$ 、 $\omega \gg \omega_0$  の場合はどうなるか? ( $\omega \ll \omega_0$  の時を Rayleigh 散乱と呼び、原子に束縛された電子による散乱のモデルである。)

### 問題 6-2 コンプトン散乱

1. 電子が真空中で静止しているとする。ここに光子が入射して散乱される過程を考える。特殊相対論的な議論によって、散乱後の光子のエネルギー  $\epsilon_1$  と散乱前の光子のエネルギー  $\epsilon$  が

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

という関係になることを示せ。ここで  $\theta$  は散乱角である。  
また、波長の変化はどのようなになるか?

2. 無偏光の輻射に対するコンプトン散乱の微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon} - \sin^2 \theta \right)$$

となる (Klein-Nishina の式)。これより、全散乱断面積  $\sigma$  を算出せよ。

3. 2. で求めた散乱断面積は  $\epsilon \ll mc^2$ 、 $\epsilon \gg mc^2$  の極限でどうなるか?

### 問題 6-3 逆コンプトン散乱

実験室系で超相対論的運動 ( $\beta \sim 1$ ) をしている電子に光子が入射したときの散乱過程を考える。ただし、電子の静止系での入射光子のエネルギー  $h\nu' \ll m_e c^2$  であるとする。

1. 電子の静止系で見た散乱を考えることにより、光子のエネルギーが実験室系で見て  $\sim \gamma^2$  倍に増加することを示せ。
2. 次に多数の電子と光子が等方的に分布している場合を考える。光のエネルギー密度を  $U_{\text{ph}}$  とすると、エネルギー  $\gamma m_e c^2$  の電子によるコンプトン散乱の結果として得られる放射パワーが

$$P_{\text{compt}} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{\text{ph}}$$

で表されることを示せ。

電子のエネルギー分布  $N(E)$  が  $E$  の巾乗に比例する場合と、電子が温度  $T$  の熱平衡にある場合に  $P_{\text{compt}}$  はそれぞれどう書けるか。

3. 多数の電子と光子が等方的に分布している場合に、エネルギー  $\epsilon_0$  を持つ光子がエネルギー  $\gamma m_e c^2$  の電子によってコンプトン散乱されたときの放射スペクトルを求めよ。
4. 電子のエネルギー分布  $N(E)$  が  $E$  の巾乗に比例し、光子のエネルギー分布が  $v(\epsilon)$  で表されるとき、上記スペクトルはどう書けるか?

### 問題 6-4 多数回逆コンプトン散乱

1. コンプトン  $y$  パラメータとは何か? 説明せよ。
2. 電子が温度  $T$  の熱平衡にあるとき、非相対論的、相対論的なコンプトン  $y$  パラメータ  $y_{\text{NR}}$ 、 $y_{\text{R}}$  はそれぞれ

$$y_{\text{NR}} = \frac{4kT}{m_e c^2} \text{Max}(\tau_{es}, \tau_{es}^2)$$

$$y_{\text{R}} = 16 \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^2 \text{Max}(\tau_{es}, \tau_{es}^2)$$

と書けることを示せ。

3. 相対論的な電子による多数回逆コンプトン散乱があると、入射光子のエネルギー分布が巾乗則になくても散乱後のスペクトルは巾乗則となることを示せ。
4. 非相対論的な電子による多数回コンプトン散乱によって、黒体放射のスペクトルがどのように変更を受けるかを議論せよ。

## 7 原子構造

### 問題 7-1 一電子原子

中心に  $Ze$  の電荷を持つ原子核があり、それに電子が 1 個束縛されているとする。

1. この電子のシュレディンガー方程式を書き下せ。
2. 1. の方程式を極座標系で書き表せ。また波動関数を動径成分と角度成分に変数分離し、それぞれが満たす方程式を導け。
3. 上記の方程式から動径成分と角度成分の解を求めよ。

### 問題 7-2 多電子原子

多電子原子において、

1. Configuration ( $nl^x$ ) とはなにか。
2.  $LS$  結合と term ( $^{2S+1}L$ ) を説明せよ。また、Hund 則とは何か。
3. スピン・軌道相互作用と、それより導かれる Lande の間隔則を説明せよ。
4. 正常ゼーマン効果と異常ゼーマン効果を説明せよ。
5. 超微細構造を説明せよ。

### 問題 7-3 Spectroscopic Term

以下の電子配置で許容される spectroscopic term をパリティと  $J$  も考慮して求めよ。ただし、 $LS$  結合を考える。

1.  $2s^2$
2.  $2p3s$
3.  $3p4p$
4.  $2p^43p$

### 追加参考文献

- 原子スペクトルと原子構造 (Herzberg 著、堀健夫訳:丸善)

#### 問題 7-4 イオン化

1.  $j$  回電離と  $j+1$  回電離したイオンの個数密度  $N_j$ 、 $N_{j+1}$  が

$$\frac{N_{j+1}N_e}{N_j} = \frac{2U_{j+1}(T)}{U_j(T)} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_{j,j+1}/kT}$$

の関係を満たすことを示せ。(Saha の式)

2. The thermal de Broglie wavelength of electrons at temperature  $T$  is defined by  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$ . The degree of degeneracy of the electrons can be measured by the number of electrons in a cube  $\lambda$  on a side:

$$\xi \equiv N_e \lambda^3 = 4.1 \times 10^{-16} N_e T^{-3/2}.$$

For many cases of physical interest, the electrons are very nondegenerate, the quantity  $\gamma \equiv \log \xi^{-1}$  being of order of 10 to 30. We want to investigate the consequences for the Boltzmann and Saha equations of  $\gamma$  being large and only weakly dependent on temperature. For the present purposes assume that the partition functions are independent of temperature and of order unity.

- (a) Show that the value of temperature at which the stage of ionization passes from  $j$  to  $j+1$  is given approximately by

$$kT \sim \frac{\chi}{\gamma}$$

where  $\chi$  is the ionization potential between stages  $j$  and  $j+1$ . Therefore, this temperature is much smaller than the ionization potential expressed in temperature units.

- (b) The rapidity with which the ionization stage changes is measured by the temperature range  $\Delta T$  over which the ratio of populations  $N_j/N_{j+1}$  changes substantially. Show that

$$\frac{\Delta T}{T} \sim \left[ \frac{d \log (N_{j+1}/N_j)}{d \log T} \right]^{-1} \sim \gamma^{-1}.$$

Therefore,  $\Delta T$  is much smaller than  $T$  itself, and the change occurs rapidly.

- (c) Using the Boltzmann equation and result (a) above, show that when  $\gamma$  is large, and atom or ion stays mostly in its ground state before being ionized.