

偏波とストークスパラメータについて

S112006 天文学科4年 谷口暁星

1 楕円偏波とストークスパラメータ

振幅と位相がランダムに変化するような無偏波成分を含まない完全偏波の場合、その電磁波の偏波特性を記述するためには電波源から伝搬してくる方向(ここではz方向とする)に対して垂直な2つの方向に電場の成分を E_x, E_y と分解し、電場の振幅 \hat{E}_x, \hat{E}_y とそれぞれの位相 δ_x, δ_y を用いて次の通りに表すことができる。

$$E_x(z, t) = \hat{E}_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad E_y(z, t) = \hat{E}_y \cos(\omega t - kz + \delta_y) \quad (1)$$

ここで位相差を $\delta \equiv \delta_y - \delta_x$ とし、 $\omega t - kz$ を2式から消去すると、電場の軌跡は次の通りに楕円軌道であることが分かる。

$$\left(\frac{E_x}{\hat{E}_x}\right)^2 - 2\frac{E_x}{\hat{E}_x} \cdot \frac{E_y}{\hat{E}_y} \cos \delta + \left(\frac{E_y}{\hat{E}_y}\right)^2 = \sin^2 \delta \quad (2)$$

実際の軌跡は振幅 \hat{E}_x, \hat{E}_y の大小関係および位相差 δ によって決まる。例えば、 $\hat{E}_x = \hat{E}_y$ で $\delta = \pi/2$ のとき、電波の進行方向(z方向)に向かって電場は左向きに回転する。これを左円偏波(LCP)という。反対に $\delta = -\pi/2$ のときは右向きに回転する右円偏波(RCP)となる。

ここで楕円軌道の長軸と短軸をそれぞれX軸,Y軸とし、楕円がxy座標からどれだけ回転しているのかを表すパラメータとして、x軸とX軸がなす角度を χ とする。すなわちXY座標での電場の成分 E_X, E_Y は次の通りに表される。

$$E_X = E_x \cos \chi + E_y \sin \chi \quad E_Y = -E_x \sin \chi + E_y \cos \chi \quad (3)$$

これらを用いて、ストークスパラメータは次の通りに表される。

$$I = (\hat{E}_x^2 + \hat{E}_y^2)/Z_0 = S \quad (4)$$

$$V = 2\hat{E}_x\hat{E}_y \sin \delta/Z_0 \quad (5)$$

$$Q = (\hat{E}_x^2 - \hat{E}_y^2)/Z_0 = \sqrt{I^2 - V^2} \cos 2\chi \quad (6)$$

$$U = 2\hat{E}_x\hat{E}_y \cos \delta/Z_0 = \sqrt{I^2 - V^2} \sin 2\chi \quad (7)$$

もともと完全偏波の場合の偏波特性を記述するパラメータは $\hat{E}_x, \hat{E}_y, \delta$ の3つだったので、ストークスパラメータの間には以下の関係が成り立ち、独立変数は3つのままである。

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (8)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{U}{Q} \right) \quad (9)$$

2 完全偏波の観測と、ストークスパラメータの意味

ストークスパラメータは1852年にジョージ・ストークス卿によって導入された4つのパラメータセットである。これは、電場の成分とその2つの位相差 $\hat{E}_x, \hat{E}_y, \delta$ を直接求めるという観測は難易度が高いためである。これに対しストークスパラメータはすべて電波の強度の次元を持っており、観測によって直接求めることができるという利点がある。

以下では完全偏波の電波を観測し、ストークスパラメータを求める手順について説明する。完全偏波している電波を直線偏波に感度のあるアンテナで観測した場合の出力は $S(\phi) = S(\chi) \cos^2(\phi - \chi)$ と表される。ここで ϕ はアンテナが感度を持つ偏波面と x 軸がなす角である。このアンテナで電波の水平成分 (x 方向) を受信した場合、その出力は

$$S(0) = (\hat{E}_x e^{i\delta x})(\hat{E}_x e^{i\delta x})^* / Z_0 = \hat{E}_x^2 / Z_0 \quad (10)$$

である。同様に電波の垂直成分 (y 方向) を受信した場合は

$$S(90) = (\hat{E}_y e^{i\delta y})(\hat{E}_y e^{i\delta y})^* / Z_0 = \hat{E}_y^2 / Z_0 \quad (11)$$

さらにアンテナを 45° 回転させて受信した場合は

$$\begin{aligned} S(45) &= \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} + \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i\delta y} \right) \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} + \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i\delta y} \right)^* / Z_0 \\ &= \frac{\hat{E}_x^2 + \hat{E}_y^2}{2Z_0} + \frac{\hat{E}_x \hat{E}_y \cos \delta}{Z_0} \end{aligned} \quad (12)$$

同様にアンテナを 135° 回転させて受信した場合は

$$\begin{aligned} S(135) &= \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} - \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i\delta y} \right) \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} - \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i\delta y} \right)^* / Z_0 \\ &= \frac{\hat{E}_x^2 + \hat{E}_y^2}{2Z_0} - \frac{\hat{E}_x \hat{E}_y \cos \delta}{Z_0} \end{aligned} \quad (13)$$

また、 45° と 135° のそれぞれの場合において、 E_y 成分のみ位相が $\lambda/4$ だけ遅れる位相子を置く

と、出力は

$$\begin{aligned} S_{\text{LCP}} &= \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} + \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i(\delta y - \frac{\pi}{2})} \right) \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} + \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i(\delta y - \frac{\pi}{2})} \right)^* / Z_0 \\ &= \frac{\hat{E}_x^2 + \hat{E}_y^2}{2Z_0} + \frac{\hat{E}_x \hat{E}_y \sin \delta}{Z_0} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{RCP}} &= \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} - \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i(\delta y - \frac{\pi}{2})} \right) \left(\frac{\hat{E}_x}{\sqrt{2}} e^{i\delta x} - \frac{\hat{E}_y}{\sqrt{2}} e^{i(\delta y - \frac{\pi}{2})} \right)^* / Z_0 \\ &= \frac{\hat{E}_x^2 + \hat{E}_y^2}{2Z_0} - \frac{\hat{E}_x \hat{E}_y \sin \delta}{Z_0} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。これらの観測量を用いてストークスパラメータは以下の通りに計算できる。

$$I = S(0) + S(90) = S(45) + S(135) \quad (16)$$

$$V = S_{\text{RCP}} - S_{\text{LCP}} \quad (17)$$

$$Q = \sqrt{I^2 - V^2} \cos 2\chi = S(0) - S(90) \quad (18)$$

$$U = \sqrt{I^2 - V^2} \sin 2\chi = S(45) - S(135) \quad (19)$$

各パラメータの意味は以下の通りである。

I 入射電波の強度 (ポインティングベクトル S に等しい)

V 左円偏波 (LCP) に対する右円偏波 (RCP) の優位性を表す。これは右円偏波のとき $S_{\text{LCP}} = 0$ 、左円偏波のとき $S_{\text{RCP}} = 0$ となることから分かる。

Q 直線偏波のうち、垂直成分に対する水平成分の優位性を表す。

U 45° 回転させた軸方向の垂直成分に対する水平成分の優位性を表す。

全偏波の程度を $m_t = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} / I$ で表すと、完全偏波の場合は $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ なので、 $m_t = 1$ となる。

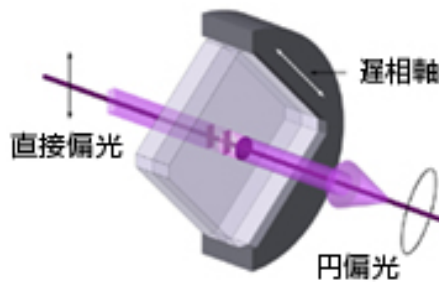


図1 1/4波長板の概念図。光学技研 website より。

3 部分偏波の観測

部分偏波の場合、電場は完全偏波成分と振幅と位相がランダムな無偏波成分の和で表される。

$$E_x = E_x^{\text{pol}} + E_x^{\text{ran}} \quad E_y = E_y^{\text{pol}} + E_y^{\text{ran}} \quad (20)$$

実際の観測では、長時間平均の電波強度を得るので $I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$ となる。よって $0 \leq m_t < 1$ となり、 $m_t = 0$ のとき完全な無偏波状態である。