Observational Cosmology -Chapter 7-

142001 理学部天文学科 4 年 石田 剛

目次

7 Gravitational lensing 2
7.0 Introduction . . . 2
7.1 Gravitational lens deflection . . . 2
7.2 The lens equation . . . 3
7.3 Magnification . . . 6
7.4 The singular isothermal sphere model . . . 8
7.5 Time delays and Hubble parameter . . . 11
7.6 Caustics and multiple images . . . 12
7.7 Other lens models . . . 14
7.8 Microlensing . . . 15
7.9 Cosmic shear . . . 16
7.10 Galaxy cluster lenses . . . 18
7.11 Finding Gravitational lenses . . . 19
7.12 Summery . . . 20

Notation

- 文章が**赤色**で書かれている箇所は強調
- 文章が**青色**で書かれている箇所は疑問
- 文章が**緑色**で書かれている箇所は疑問への解答や訂正 (ゼミ後に更新)

7 Gravitational lensing

7.0 Introduction

通常、天文学では明るい天体しか観測することが出来ないが、重力レンズ効果を利用するとより暗い天体についても調べることができる。この章では、物質が周囲の時空をどのように曲げるかについて議論する。

7.1 Gravitational lens deflection

Einstein の一般相対性理論によると、質量を持つ全ての物体は周囲の時空を曲げる。そのため source からの光は曲げられ、いくつもの経路をたどって到達する (図 7.1)。これが重力レンズ効果であり、lensing を受ける背景銀河と周囲の時空を曲げる前景銀河 (団) が視線方向に重なると生じる。図 7.3 はその一例で、背景銀河が重力レンズ効果により弧状になっていることが分かる。また、**重力レンズ効果は surface brightness を保存するので[*1]、像が引き伸ばされることにより flux が増す。**

- (例) IRAS FSC 10214+4724 at $z = 2.286$
  bolometric luminosity : $3 \times 10^{14}\,\mathrm{L}_\odot$, deflector : at $z = 0.9$

実際にその天体が重力レンズ効果を受けているのか、もしくはたまたま曲がった形状の銀河であるのかを区別するにはいくつかの方法がある。

- lensing と consistent な morphology を探す
- 背景天体とレンズ天体の redshift を見積もり、レンズ天体が十分前方にあるかを確認する
- 背景天体の複数の像のスペクトルが consistent か見る (inconsistency が十分小さければ differential magnification や microlensing と判断できる)

しかし、往々にしてこれらの方法はデータの不足により一部しか用いることが出来ない。

もう一つの判定法として、光は波長によらず測地線に沿って運動するため、lensing も波長に依存しない (achromatic) ことを利用する。すなわち背景天体の異なる像は全て同じ色 (スペクトル) を持っていなければならない。仮に、source からの光がレンズ天体のダストによって減光を受ける場合、像の見た目の色が変化するが、この判定法はダスト減光をほとんど受けない電波で行なうのであまり問題はない。**一方 source 自身に色の勾配があり、各部分で異なる magnification を受ける場合は、異なる像の色が様々なものになりうる。**そのため、観測される achromaticity が differential magnification によるものかどうか慎重にチェックしなければならない。

重力レンズ効果によって光がどの程度曲げられるか Newtonian で考える。質量 M のレンズ天体があり、光子が初速度 c で突入するとする (図 7.6)。このとき、deflection angle ϕ は $\phi = v_y/c$ と表される。v_y はレンズ天体を通過する時の光子の y 方向の速度である。

光子の加速度 a は $a = GM/r^2$ であるから、y 方向の加速度 a_y は $a_y = (GM/r^2)\cos\theta$ となる。また、角運動量保存則より $r^2\dot{\theta}$ が一定となる。**ここで、$M \to 0$ とすれば $r^2\dot{\theta} = bc$ であることが分かる。**ただし、b は impact parameter である。

次に、微小時間 $\mathrm{d}t$ での y 方向の速度変化 $\mathrm{d}v_y$ は $\mathrm{d}v_y = a_y(t)\,\mathrm{d}t$ と書けるので、角運動量保存の結果と合わせ

$$\mathrm{d}v_y = a_y(t)\,\mathrm{d}t = \frac{GM}{r^2}\cos\theta\,\mathrm{d}t$$

[*1] 7.3 節で見る。

$$= \frac{GM}{r^2}\cos\theta\frac{r^2}{bc}\,\mathrm{d}\theta = \frac{GM}{bc}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

を得る。これを $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで積分すれば

$$v_y = \frac{2GM}{bc} \tag{2}$$

より、Newtonian での deflection angle $\phi_{\mathrm{Newtonian}}$ は

$$\phi_{\mathrm{Newtonian}} = \frac{v_y}{c} = \frac{2GM}{bc^2} \tag{3}$$

と求まる。弱い重力場近似で相対論的な評価を行うと、2 倍だけ大きな

$$\phi = \frac{4GM}{bc^2} \tag{4}$$

が得られる[*2]。

7.2 The lens equation

重力レンズ効果は単純な幾何学で理解できる (図 7.7)。source からの光子はほとんどの時間、source-lens 間、または lens-observer 間にあり、lensing を受ける時間は非常に短い。そのためここでは薄肉レンズ近似を採用する。ところで図 7.7 を見る上で注意しなければならないのが、距離 D_* は全て**角径距離**ということである。**したがって、$D_{\mathrm{S}} = D_{\mathrm{LS}} + D_{\mathrm{L}}$ が成り立たない。**

角径距離

ある天体の直径を d, その天体を見込む角度を $\theta\,(\ll 1)$ とすると角径距離 D_{ang} は

$$D_{\mathrm{ang}} = \frac{d}{\theta} \tag{5}$$

で定義される。

またここでは出てこないが、以下で定義される**光度距離** D_{lum} も一般に距離の足し上げが出来ない。

光度距離

ある天体の光度を L, flux を F とすると光度距離 D_{lum} は

$$D_{\mathrm{lum}} = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \tag{6}$$

で定義される。

ただし、共動座標系で測った**共動距離** D_{com} については距離の足し上げが可能である。

さて、今レンズ天体、像、source, 地球が全て同一平面上にあるとすれば、図 7.7 より明らかに

$$\beta = \theta - \alpha \tag{7}$$

が成り立つ。一方、同一平面上にない場合はベクトルで考え

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \tag{8}$$

を得る。これを**レンズ方程式**と呼び、重力レンズ効果を理解するための基礎方程式である[*3]。

[*2] Newtonian で得られた解との違いの原因は、角運動量保存の代わりに $r^2\,\mathrm{d}\theta\,/\,\mathrm{d}\lambda$ が成り立つことにある。λ は光子の経路にそって測られた parameter であり、これを座標時間 t に変換する際、空間の曲率のために GM/c^2 の factor がかかる。したがって、deflection angle が大きくなる。

[*3] 同一平面上にある場合の式で α は $\boldsymbol{\alpha}$ の絶対値ではないことに注意。負の値にもなりうる。

Ex 7.1 共動距離 $r_{\rm L}$, $r_{\rm S}$ と赤方偏移 $z_{\rm L}$, $z_{\rm S}$ を用いて平坦な空間の $D_{\rm LS}$ の表式を書け。

(解答) source と lens 間の共動距離 $r_{\rm LS}$ は $r_{\rm LS} = r_{\rm S} - r_{\rm L}$ と書ける。また、lens から見た source の赤方偏移 $z_{\rm LS}$ は、a_* を scale factor として

$$1 + z_{\rm LS} = \frac{a_{\rm L}}{a_{\rm S}} = \frac{a_0/a_{\rm S}}{a_0/a_{\rm L}} = \frac{1+z_{\rm S}}{1+z_{\rm L}} \tag{9}$$

となる。したがって、平坦な空間では

$$D_{\rm LS} = \frac{r_{\rm LS}}{1+z_{\rm LS}} = \underline{\frac{1+z_{\rm S}}{1+z_{\rm L}}(r_{\rm S} - r_{\rm L})} \tag{10}$$

が成り立つ。

Ex 7.2 $D_{\rm S} \neq D_{\rm LS} + D_{\rm L}$ に注意して、7.4 式を証明せよ。

(解答) 観測者の視線方向と垂直で source を含む面を考える。レンズ天体をこの面上に射影し、その点を L′ とおけば、$\overrightarrow{\rm L'S} = D_{\rm S}\boldsymbol{\beta}$, $\overrightarrow{\rm L'S_1} = D_{\rm S}\boldsymbol{\theta}$, $\overrightarrow{\rm SS_1} = D_{\rm S}\boldsymbol{\alpha}$ より

$$D_{\rm S}\boldsymbol{\beta} = D_{\rm S}\boldsymbol{\theta} - D_{\rm S}\boldsymbol{\alpha} \tag{11}$$

が成り立つ。したがって両辺を $D_{\rm S}$ で割り、(薄肉レンズ近似の下での) 一般の場合のレンズ方程式

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha} \tag{12}$$

を得る。

ここまではレンズ天体の質量分布や、その質量がどの程度光を曲げるかなどを考慮していなかった。そこで (4) 式を用いれば、deflection angle $\hat{\alpha}$ は

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi} \tag{13}$$

と書け、観測されるずれ α は

$$\alpha = \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\hat{\alpha} = \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\frac{4GM}{c^2\xi} \tag{14}$$

となる。よって、レンズ方程式は

$$\beta = \theta - \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\frac{4GM}{c^2\xi} = \theta - \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm L}D_{\rm S}}\frac{4GM}{c^2\theta} \tag{15}$$

のように表される。ただし、最後の式変形で $\theta = \xi/D_{\rm L}$ を用いた。

Ex 7.3 背景天体がレンズ天体と完全に一直線に並んでいるとどのように見えるか。

(解答) 対称性から背景天体の像が完全な円形となって見えるはずである。これがいわゆる Einstein ring と呼ばれる現象である。

(15) 式より $\beta = 0$ の場合の像の angular size $\theta_{\rm E}$ は

$$\theta_{\rm E} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm L}D_{\rm S}}} \tag{16}$$

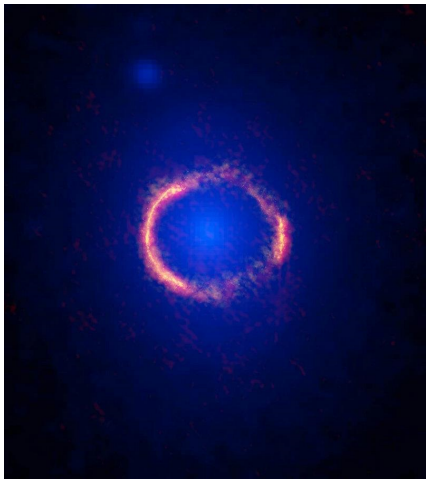

図 1　Einstein ring の例

となり、これを Einstein **半径**と呼ぶ。source の位置 β が $\theta_{\rm E}$ 程度かそれより少ない場合、magnification は強くなる。逆に、$\beta \gg \theta_{\rm E}$ の場合は非常に弱い magnification となる。7.6 章で $\theta_{\rm E}$ の値によって見える像が複数になるか、それとも 1 つだけになるかが変わることを見る。また、複数の像はだいたい $2\theta_{\rm E}$ 程度離れる。

Einstein 半径を具体的な数値を用いて書き直すと以下のようになる。

$$\frac{\theta_{\rm E}}{\rm arcsec} = \left(\frac{M}{10^{11.09}\,{\rm M}_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{D_{\rm L}D_{\rm S}/D_{\rm LS}}{\rm Gpc}\right)^{-1/2} \tag{17}$$

典型的には銀河-銀河間の lensing による Einstein 半径は arcsec 程度、銀河団による lensing ではその約 10 倍程度となる。また、後で見るが microlensing は以下の式で特徴づけられる。

$$\frac{\theta_{\rm E}}{\rm marcsec} = \left(\frac{M}{1.23\,{\rm M}_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{D_{\rm L}D_{\rm S}/D_{\rm LS}}{10\,{\rm kpc}}\right)^{-1/2} \tag{18}$$

(15) 式を Einstein 半径を用いて書き直し、θ について解けば

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\rm E}}^2}\right) \tag{19}$$

を得る。

Ex 7.4　(19) 式の解の 1 つは常に負であることを示せ。また、その解が物理的かどうか検討せよ。

(解答) (19) 式で複号が負の解は

$$\beta - \sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\rm E}}^2} < 0 \tag{20}$$

より θ が負となる。これは物理的な解であり、ある像の counterimage についての解を表す。図 7.7 で言えば 2 つの解がそれぞれ S_1 と S_2 に対応する。

Ex 7.5　一般に、source の位置 $\boldsymbol{\beta}$ に対して unique な $\boldsymbol{\theta}$ が存在するか。また逆に、各 $\boldsymbol{\theta}$ に対して unique な $\boldsymbol{\beta}$ が対応するか。

(解答) 今までの議論からある source に対して複数の像が出来うるので、$\boldsymbol{\beta}$ が与えられたとき対応する $\boldsymbol{\theta}$ は unique ではない。また逆は (8) 式から明らかなように、ある $\boldsymbol{\theta}$ に対して $\boldsymbol{\beta}$ が一意に対応する。

7.3 Magnification

重力レンズ効果は天体のサイズだけでなく flux も増す。これは、重力レンズ効果が surface brightness を保存することと関係している。以下でその証明を与える。

光子を 6 次元位相空間で扱い、その状態を (x, y, z, p_x, p_y, p_z) で指定する。今、Liouville **の定理**より光子の位相空間密度は不変となる。

Liouville の定理

すべての物体は Hamilton の正準方程式

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{21}$$

にしたがって運動し、位相空間上である軌跡を描く。このとき、位相空間の体積要素はその時間発展に伴い形を変えるが、体積自体は不変であることが導かれる。これを Liouville の定理と呼ぶ。

次に、z 軸方向に向けられた望遠鏡を考え、エネルギーが $E \sim E + \delta E$ の光子が立体角 $\Delta\Omega$ の方向から時間 δt の間に N 個入射するとする。このとき、実空間での体積 V_s は $V_s = A\delta t$ と表される。ただし、A は検出器の面積である。また、光子のエネルギーは運動量 p と光速 c を用いて $E = pc$ と表せるので、運動量空間での体積 V_p は $V_p = (1/c^3)E^2\delta E\Delta\Omega$ となる。よって、光子の位相空間密度 $\rho_{\rm phase}$ は

$$\rho_{\rm phase} = \frac{N}{V_s V_p} = \frac{Nc^3}{A\delta t E^2 \delta E \Delta\Omega} \underbrace{=}_{E=h\nu} \frac{Nc^3}{h^3 A\delta t \nu^2 \delta\nu \Delta\Omega} \underbrace{=}_{\text{Liouville の定理}} \text{const.} \tag{22}$$

と書ける。一方、surface brightness I_ν は

$$I_\nu = \frac{Nh\nu}{A\delta t \delta\nu \Delta\Omega} \tag{23}$$

であるから、2 式より $I_\nu/\nu^3 = \text{const.}$ が従う。**重力レンズによって光子はエネルギーを得ることも失うこともない** (S-Z **効果を受けたとしても**//S-Z **効果は考えないの意。**CMB **光子の** SED **は当然変化するので、それは別途考える**) ので、ν は保存し、結果 I_ν が不変となる。

天体の flux density S_ν は I_ν が一様であれば、その天体を見込む立体角を Ω として $S_\nu = I_\nu\Omega$ となる。今、I_ν は重力レンズ効果によって変わらないので、lensing を受けた天体の立体角を $\Omega_{\rm lensed} = \mu\Omega$ とすれば、flux density は $S_{\nu,\rm lensed} = I_\nu\Omega_{\rm lensed} = \mu S_\nu$ と変化する。しかし、これはエネルギー保存則を破ってはいないだろうか？どこから余分な光子は供給されるのだろうか？これに対する 1 つの答えは、光子はその進行方向を変えるのである方向には flux が減少する、というものである。またもう 1 つの答えとして、レンズ天体による空間の曲率の変化を考慮する必要がある、というものがある。これは、source からの光子はレンズ天体の影響で 4π よりわずかに小さい方向に広がる一方、光子数は保存されることに起因する。

レンズが軸対称のとき、magnification factor μ **は**

$$\mu = \frac{\theta}{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta} \tag{24}$$

と書ける。

Ex 7.6 レンズ天体が質点の場合 (軸対称の特別な場合) のレンズ方程式

$$\beta = \theta - \frac{{\theta_{\rm E}}^2}{\theta} \tag{25}$$

より、magnification factor μ が

$$\mu = \left[1 - \left(\frac{\theta_{\rm E}}{\theta}\right)^4\right]^{-1} \tag{26}$$

と書けることを示せ。

(解答) (24), (25) 式より

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\theta}{\beta}\frac{1}{{\rm d}\beta/{\rm d}\theta} \\ &= \frac{\theta}{\theta - {\theta_{\rm E}}^2/\theta}\frac{1}{1+(\theta_{\rm E}/\theta)^2} \\ &= \frac{1}{1-(\theta_{\rm E}/\theta)^4}\end{aligned} \tag{27}$$

を得る。

Ex 7.7 像が Einstein 半径の内部にあるとき、(26) 式は負の値となる。これは物理的に意味のある解か検討せよ。(ヒント：(24) 式はどういう場合に負になるか。)

(解答) $\beta \to \beta + \delta\beta\,(\delta\beta > 0)$ のとき、$\theta \to \theta - \delta\theta\,(\delta\theta > 0)$ となれば、$\mu < 0$ となる。これはすなわち、像が反転していることを表す。**また、像が反転していなくても**'counterimage'**であれば $\theta < 0$ であり、$\mu < 0$ になるような気がするがよくわからない。//ここでの θ は常に正となるように定義されている模様。以前に出てきた図 7.7 の θ は正負両方の値を取りうる。**

2 つの像の magnification factor をそれぞれ μ_1, μ_2 とおくと、全体の magnification factor μ は $\mu = |\mu_1| + |\mu_2|$ となる。特に、レンズ天体が質点の場合には簡単な計算により[*4]

$$\mu = \frac{2 + (\beta/\theta_{\rm E})^2}{(\beta/\theta_{\rm E})\sqrt{(\beta/\theta_{\rm E})^2 + 4}} \tag{28}$$

であることが分かる。上式より、いかなる β, $\theta_{\rm E}$ に対しても μ は 1 より大きくなる。前にも述べたように、これはエネルギー保存則を破るものではなく、空間の曲率のため全立体角が 4π より小さくなることで説明が可能である。

重力レンズ効果は source counts に興味深い影響を与える。今、仮想的に我々と系外銀河の間にレンズ天体をばらまく。背景天体はレンズ天体によって増光され、その確率分布は $\Pr(|\mu|)$ で与えられる。一般にレンズ天体は疎らなので、$\Pr(|\mu|)$ は $|\mu| = 1$ に鋭いピークを持つ (簡単のため赤方偏移依存性は無視)。$|\mu|$ は 1 より小さくなりうるので、一部の天体の flux は減少する。

intrinsic な確率分布を $\Pr(|\mu|)$ とすると、観測される確率分布はそれとは異なる。今、観測される flux が S_0 の天体を考える。source counts として power-law を仮定すれば、${\rm d}N/{\rm d}S \propto S^{-\alpha}\,(\alpha > 0)$ と書ける。観測される flux が S_0 となるのは、もともと flux が S_0 より大きい天体が減光される場合と、その逆の場合がある。source counts の形を考えれば、**より暗い天体の数が多いので後者の影響が大きい**と推測される。したがって、観測される magnification factor の分布は high-$|\mu|$ 側に歪む。これを magnification bias と呼ぶ。

[*4] あとで

もしレンズが軸対称ではない場合、計算は少し複雑になる。source の位置 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ と像の位置 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$ は、行列 A を用いて $\mathrm{d}\boldsymbol{\beta} = A\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ と結ばれる。ここで A は以下で定義される行列である。

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \partial\beta_x/\partial\theta_x & \partial\beta_x/\partial\theta_y \\ \partial\beta_y/\partial\theta_x & \partial\beta_y/\partial\theta_y \end{pmatrix} \tag{29}$$

magnification factor を計算すると

$$\mu = \frac{\text{observed image area}}{\text{background image area}} = \frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\beta^2} = \frac{1}{\det A} \tag{30}$$

と求まる。これより、A を inverse magnification tensor と呼ぶ。tensor を忘れた読者は以下を参照。

図 7.10(a) のように、質量 M の物体にばね定数 k の 2 本のばねが付いている。このとき物体が受ける力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y) = (-kx, -ky) = -k(x, y) = -k\boldsymbol{r} \tag{31}$$

となる。ここで x 軸方向のばねを 2 本に増やすと、物体が受ける力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y) = (-2kx, -ky) = -\begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}(x, y) = -K\boldsymbol{r} \tag{32}$$

となる。K を k に対応して spring tensor と呼ぶ。tensor についての直感的な理解はこれで十分だが、厳密には行列がすべて tensor になるわけではない。本来の定義は座標変換に伴い、特定の変換則を受けるものを tensor と呼ぶ。具体的な変換則についてはここでは触れない。

7.4 The singular isothermal sphere model

前節で扱った、レンズ天体を質点とみなす考え方は良いモデルではない。では、より現実的なモデルとしてどのようなモデルを考えることができるだろうか。一般に、多くの銀河は非常に平坦な回転曲線を持つ。つまり、1 次元速度分散 σ_v が中心からの距離 r にほぼ依存しない。

1 つのアプローチとして、星や物質の集まりをあるガスの中の粒子として捉える方法がある。この ‘ガス’ は理想気体の状態方程式 $p = \rho kT/m$ に従うとする。T は速度分散を通して $m{\sigma_v}^2 = kT$ と定義される。

これを解くために、静水圧平衡の式を持ち出す。(演習なり授業なりで何度もやってきたので詳細は割愛するが、) 質量座標を $M(r)$ とすれば

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \tag{33}$$

が成り立つ。これと理想気体の状態方程式 (に T の定義式を代入したもの) から得られる

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}{\sigma_v}^2 \tag{34}$$

を代入し[*5]、整理すれば

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}{\sigma_v}^2 = -GM(r) \tag{35}$$

を得る。また、$M(r)$ は

$$M(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' \tag{36}$$

であるから、(35) 式の両辺を微分することにより

$$\begin{aligned} \frac{2r\rho - r^2\,\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}{\sigma_v}^2 + \frac{r^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2}{\sigma_v}^2 &= -4\pi G\rho r^2 \\ \therefore \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{4\pi G\rho^2}{{\sigma_v}^2} &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

[*5] σ_v の r 依存性は無視している。

を得る。この微分方程式を解けば[*6]

$$\rho(r) = \frac{{\sigma_v}^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2} \tag{38}$$

と分かる。よって直ちに

$$M(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{2{\sigma_v}^2}{G}r \tag{39}$$

が従い、Kepler 回転の運動方程式から回転速度 v と速度分散 σ_v の間の関係

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{r} &= \frac{GM(r)}{r^2}\\ \therefore v^2 &= 2{\sigma_v}^2\end{aligned} \tag{40}$$

を得ることができる。また、視線方向に射影した表面密度 $\Sigma(\xi)$ は

$$\begin{aligned}\Sigma(\xi) &= 2\int_0^\infty \rho(\sqrt{r^2+\xi^2})\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{{\sigma_v}^2}{\pi G}\frac{1}{\xi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{1+(r/\xi)^2}\\ &= \frac{{\sigma_v}^2}{\pi G}\frac{1}{\xi}\left[\tan^{-1}\frac{r}{\xi}\right]_0^\infty\\ &= \frac{{\sigma_v}^2}{2G}\frac{1}{\xi}\end{aligned} \tag{41}$$

と書ける。この質量分布モデルを singular isothermal sphere と呼ぶ。singular と呼ばれる所以は、$\rho(r)$, $\Sigma(\xi)$ が $r, \xi \to 0$ で発散することによる。この発散を回避する方法はいくつかあるが、その 1 つを後で紹介する。上式より ξ の内部にある全質量 $M(\xi)$ は

$$M(\xi) = \int_0^\xi \Sigma(\xi')2\pi\xi'\,\mathrm{d}\xi' = \frac{\pi{\sigma_v}^2}{G}\xi \tag{42}$$

と書ける。また、このモデルは $M(r) \propto r$ であり $r \to \infty$ で発散するため、物理的には適当な半径 (典型的には Einstein 半径よりも大きいところ) で打ち止めにする必要がある。

では、singular isothermal sphere による重力レンズ効果はどのようになるのか？ Birkhoff **の定理**より、球対称の質量分布による空間の歪みは ξ より内側にある質量のみに依存する。

Birkhoff の定理

系が球対称のとき、注目している点ではそれより外側の質量分布の影響はなく、内側の質量にのみ依存する。これを Birkhoff の定理と呼ぶ。Newtonian の範囲では何度も使ってきた定理であるが、一般相対論の範囲でも成り立つ。

(13) 式より、deflection angle $\hat{\alpha}$ は

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi} = \frac{4\pi{\sigma_v}^2}{c^2} = 1.4'' \times \left(\frac{\sigma_v}{220\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)^2 \tag{43}$$

となる。また、(16) 式より Einstein 半径は

$$\begin{aligned}\theta_\mathrm{E} = \sqrt{\frac{4GM(\theta_\mathrm{E})}{c^2}\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{L}D_\mathrm{S}}} &= \sqrt{\frac{4G}{c^2}\frac{\pi{\sigma_v}^2}{G}\xi\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{L}}\frac{\theta_\mathrm{E}}{\xi}}\\ \therefore \theta_\mathrm{E} &= \frac{4\pi{\sigma_v}^2}{c^2}\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{L}}\end{aligned} \tag{44}$$

[*6] 解こうと思ったんですが解けませんでした。代入して解が正しいことは確認しました。

と表される。今、レンズ天体の質量分布は球対称なので、(7) 式のレンズ方程式が使える。$\beta = 0$, すなわち source がレンズ天体の真後ろにある場合、物理的に考えれば $\theta = \theta_{\rm E}$ となる。したがって、$\alpha = \theta_{\rm E}$ が従う。α が正負両方の値を取ることを考えれば、singular isothermal sphere の場合のレンズ方程式は

$$\beta = \theta \pm \theta_{\rm E} \tag{45}$$

となることが分かる。**これより、$\beta > \theta_{\rm E}$ のときは $\theta = \beta + \theta_{\rm E}$ のみが解となる。一方、$\beta < \theta_{\rm E}$ のときは $\theta = \beta \pm \theta_{\rm E}$ の 2 つの像ができる (図 7.11)。//これだけでは解の個数の制限はできない。同じ方向に 2 つの像ができないという拘束条件が何かあるらしいが、現在調べ中。**また、magnification factor は (24) 式より

$$\mu_{\pm} = \frac{\theta_{\pm}}{\beta} = 1 \pm \frac{\theta_{\rm E}}{\beta} = \left(1 \mp \frac{\theta_{\rm E}}{\theta_{\pm}}\right)^{-1} \tag{46}$$

となる。厳密には 3 つ目の像が $\theta = 0$ にできるはずであるが、これは無限小の点からやってくる光であり、flux が 0 となり観測できない。ただし、銀河中心での singular isothermal sphere の密度発散を回避すれば (物理的な要請)、有限の大きさの 3 つ目の像が観測される (図 7.11b)。この場合、$\beta \neq 0$ でも 3 つ目の像は観測され、一般に $|\mu| < 1$ となる。eMERLIN の次なる狙いは、この faint な 3 つ目の像を観測し銀河中心の密度プロファイルを制限することである。

Ex 7.8 レンズ天体は表面密度 Σ のシートが無限に積み重なったものであると考え//**レンズ天体が無限に積み重なったシートなのではなく、射影した時に無限に広いシートということ**

$$\alpha(\theta) = \frac{4\pi G\Sigma}{c^2}\frac{D_{\rm L}D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\theta \tag{47}$$

を示せ。また、Σ が臨界密度

$$\Sigma_{\rm cr} = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{D_{\rm S}}{D_{\rm L}D_{\rm LS}} \tag{48}$$

となるとき何が起こるか考えよ。

(解答) (42) 式より $M(\xi)$ は

$$M(\xi) = 2\pi\Sigma\int_0^{\xi}\xi'\,{\rm d}\xi' = \pi\Sigma\xi^2 \tag{49}$$

となるので、観測される α は

$$\alpha = \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\frac{4GM(\xi)}{c^2\xi} = \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\frac{4\pi G\Sigma}{c^2}\xi = \frac{4\pi G\Sigma}{c^2}\frac{D_{\rm L}D_{\rm LS}}{D_{\rm S}}\theta \tag{50}$$

のように求まる[*7]。ここで $\Sigma = \Sigma_{\rm cr}$ とすると直ちに $\alpha = \theta$ を得る。したがってレンズ方程式より、任意の θ に対して $\beta = 0$ が成り立つことが分かる。**これが物理的にどういう状況かはよくわかりませんでした。$\beta \neq 0$ のとき、レンズ天体が臨界密度ならば解はない (像が見えない) というのが妙で…//どんな方向に像が見えていたとしても、source が $\beta = 0$ に常にあるということなので、重力レンズが実際のレンズのように光を 1 点に集めている。また、無限に広いシートとなので β の原点を好きに取れる。**

[*7] ここで暗に Birkhoff の定理を使っている。すなわち球対称な天体のみを考えており、一般に表面密度 Σ のシートが重なったとみなせる天体については考えない。

7.5 Time delays and Hubble parameter

重力レンズ効果により Hubble parameter を知ることができる。それを以下で見るため、もう一度質点系での議論に移る。

7.1 節での議論により、Newtonian での deflection angle $\phi_{\rm Newtonian}$ は

$$\begin{aligned}\phi_{\rm Newtonian} = \frac{v_y}{c} &= \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{GM}{bc^2}\cos\theta\,{\rm d}\theta \\ &= \frac{1}{c}\int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{GM}{r^2}\cos\theta\,{\rm d}t \end{aligned} \tag{51}$$

と書ける。ここで、$(GM/r^2)\cos\theta$ は重力ポテンシャル Φ の gradient の y 方向成分に等しい。これを $\nabla_\perp\Phi$ とおけば

$$\phi_{\rm Newtonian} = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp\Phi\,{\rm d}t \tag{52}$$

となる。今は、$\perp$ を y 方向とみなしているが、厳密には運動方向に対して垂直なのは y 方向と異なる。${\rm d}t = {\rm d}x/c$ (もちろん近似) なので

$$\phi_{\rm Newtonian} = \frac{1}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp\Phi\,{\rm d}x \tag{53}$$

と変形できる。**さらに、光が進む方向を変えることを effective な屈折率 n が場所ごとに変化するためと考えれば**

$$\phi_{\rm Newtonian} = -\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp n\,{\rm d}x \tag{54}$$

を得る。つまり、$\nabla_\perp n = -(1/c^2)\nabla_\perp\Phi$ と見なしている。

一方、一般相対論でも考えてみると、球対称時空の計量 (Schwarzschild 計量) は

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_{\rm S}}{r}\right)c^2\,{\rm d}t^2 - \frac{1}{1-r_{\rm S}/r}\,{\rm d}r^2 - r^2\,{\rm d}\Omega^2 \tag{55}$$

と書ける。ただし、$r_{\rm S} = 2GM/c^2$ は Schwarzschild 半径である。今、弱い重力場近似のもとで考えれば

$$\left(1-\frac{r_{\rm S}}{r}\right)^{-1} = \left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1} \simeq 1-\frac{2\Phi}{c^2} \tag{56}$$

となる。また、光は測地線 ${\rm d}s^2 = 0$ に沿って運動するので、動径方向だけ考えれば ${\rm d}\Omega^2 = 0$ より

$$\left(\frac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\right)^2 = \frac{1+2\Phi/c^2}{1-2\Phi/c^2}c^2 \tag{57}$$

を得る。以上より、屈折率 n は

$$n = \sqrt{\frac{1-2\Phi/c^2}{1+2\Phi/c^2}} \simeq 1-\frac{2\Phi}{c^2} \tag{58}$$

であり、$\nabla_\perp n = -(2/c^2)\nabla_\perp\Phi$ と Newtonian の 2 倍になっていることが分かる。

何もない平坦な空間では、光が ${\rm d}l$ 進むのにかかる時間は $(1/c)\,{\rm d}l$ である。一方、屈折率 n の媒質の中では $(n/c)\,{\rm d}l$ となる。したがって、source と observer の間に重力レンズがあると

$$\begin{aligned}\Delta t &= \int_{\rm source}^{\rm observer} \frac{1}{c}\,{\rm d}l - \int_{\rm source}^{\rm observer} \frac{n}{c}\,{\rm d}l \\ &= \int_{\rm source}^{\rm observer} \frac{1-n}{c}\,{\rm d}l \\ &= \int_{\rm source}^{\rm observer} \frac{2\Phi}{c^3}\,{\rm d}l \end{aligned} \tag{59}$$

で表わされる時間の遅れが生じる。これを Shapiro delay と呼ぶ[*8]。source の異なる 2 つの像はそれぞれ異なる経路を通った光であるから、一般にはそれらの間に相対的な時間の遅れが生じる。

以上の話を利用すると Hubble parameter H_0 を知ることができる[*9]。いままで導出してきたレンズ方程式を見るとわかるが、ほとんどの量は無次元量であり、したがって系の絶対的な大きさを知ることはできない。**しかし、Shapiro delay は source と observer の距離に比例し、また cosmological distance は c/H_0 に比例するので[*10]、$\Delta t = 1/H_0 \times$ (constant depending on lens mass model) が成り立つ。**よって、重力レンズ系を再現する mass model が立てられれば $H_0\Delta t$ がわかり、具体的に時間の遅れを観測することで H_0 に制限を与えることができる。

これはいくつかのレンズ天体に対して適用されてきたが、最も大きな不定性は mass model による (cosmological parameter の不定性より大きい)。また、時間の遅れ自体観測することが難しいこともある。いくつかの観測結果の平均を取ると、$H_0 = 72^{+8}_{-11}\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ という結果が得られている。

7.6 Caustics and multiple images

重力レンズによって様々な美しい像のパターンが見える。これを理解するために Fermat **の原理**を利用する。

Fermat の原理

光の経路はその光路長が最小となるようにとられる。これを Fermat の原理と呼ぶ。

7.5 節での議論から、deflection angle $\hat{\boldsymbol{\alpha}}\,(=\boldsymbol{\phi})$ は

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp \Phi \,\mathrm{d}x \tag{61}$$

と分かっている。ただし、より一般のベクトル表記にしてある[*11]。$\boldsymbol{\alpha} = (D_{\mathrm{LS}}/D_{\mathrm{S}})\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ より、レンズ方程式は

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \frac{2}{c^2}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp \Phi \,\mathrm{d}x \tag{62}$$

となる。今、あるスカラー関数 ψ を用いて $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \nabla_\theta \psi$ と書けたとする。ただし、$\nabla_\theta = (\partial\theta_x, \partial\theta_y)$ である。このような ψ として最も簡単なものは

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{S}}}\frac{2}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi \,\mathrm{d}x \tag{63}$$

である。実際

$$\nabla_\theta \psi = \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}}\frac{2}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla_\theta}{D_{\mathrm{L}}}\Phi \,\mathrm{d}x = \frac{2}{c^2}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp \Phi \,\mathrm{d}x \tag{64}$$

と成り立っている。このスカラー関数 ψ を scaled projected Newtonian potential と呼ぶ。レンズ方程式をさらに変形すると

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta} - \nabla_\theta \psi = \nabla_\theta \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi\right] \tag{65}$$

のように書ける。上式の大括弧の中身が意味するものを理解するために、天下りだが以下の表式を与える。

$$\Delta t(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1+z_{\mathrm{L}}}{c}\frac{D_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{S}}}{D_{\mathrm{LS}}}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi\right] = \Delta t_{\mathrm{geom}} + \Delta t_{\mathrm{grav}} \tag{66}$$

[*8] $\Phi < 0$ より $\Delta t < 0$ であることに注意。

[*9] Hubble parameter と言うと当時の Hubble constant を意味することが多い気がする。ここでは、現在の Hubble constant のことを示す。

[*10] たとえば共動距離 D_{com} は

$$D_{\mathrm{com}} = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{(1+z')^2(1+z'\Omega_{\mathrm{m},0}) - z'(2+z')\Omega_{\Lambda,0}}} \tag{60}$$

と書ける。c/H_0 を Hubble distance と呼ぶ。

[*11] 前節では $\nabla_\perp \Phi$ はスカラーだったが、この式ではベクトルになっていることに注意。共通の notation だが意味が違う。

ここで、Δt は前節でも見た時間の遅れであり、$z_{\rm L}$ はレンズ天体の redshift である。$1+z_{\rm L}$ の factor がかかっているのは、光が地球に届くまでに時間が引き伸ばされる効果を表している。また、$\Delta t_{\rm geom}$ は単純に幾何学的に光の経路が長くなることによる時間の遅れであり、$\Delta t_{\rm grav}$ は Shapiro time delay である。以上の式を表すと、$\nabla_\theta t(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ [*12]を得る。つまり、時間の遅れが停留点となるような位置に像が見えることを示す。これが Fermat の原理の宇宙論版である。さらに 7.9 節で ψ が射影された表面密度 Σ と関連していることを見る。

時間の遅れは時に time delay surface と呼ばれる。というのも θ_x, θ_y に共に依存するためである。そして像はこの surface の停留点 (最大点、最小点、鞍点、変曲点) に作られる。ただし、レンズが軸対称の時は 1 軸だけ考えれば良い。以下では軸対称レンズを考え、時間の遅れが像や source の位置によってどう変わるかを図示した (図 7.15, 7.16)。

図 7.15 はある位置 β に source をおいた時、像の位置 θ によって $t_{\rm geom}, t_{\rm grav}, t_{\rm total}$ がどう変化するかを表している。また、図 7.16 では source の位置を変え、$t_{\rm total}$ がどう変化するかを表している。図 7.16 を見ると、最も左の点が source の位置が変化するにつれ右の点と合体し、消失するのが分かる。これは、新しく最小点をつくることは同時に最大点を作ることになるからである。したがって、non-singular の場合常に像は奇数個現れる。これを odd-number theorem と呼ぶ。この定理は軸対称ではない一般の系でも成り立つ。

Ex 7.9 図 7.15 の像を最大点、最小点、鞍点に分類せよ (ヒント：紙面から飛び出る軸を考えよ)。
(解答) 左の点から順に、鞍点、最大点、最小点。

Ex 7.10 図 7.11b にあるような特異点を回避した isothermal sphere のポテンシャルを考える。徐々に中心のポテンシャルを深くしていくと、次第に図 7.11a の singular isothermal sphere に近づいていくが、このとき中心を通る光の time delay はどうなるか。また、完全に singular isothermal sphere になったとき、この像はどこへ消えるのか。
(解答) 図 7.15 の中段の図からわかるように、中心のポテンシャルが深くなっていくと、$t_{\rm grav}$ は発散する。したがって、中心を通る光が source から observer に届くために無限の時間がかかるので、その像は消失する。また別の答えとして、中心のポテンシャルが無限に深くなるとそれはもはや弱い重力場近似が成り立たないため、今までの論理が崩壊するとも言える。

最大点、最小点、鞍点にできる像はそれぞれ特徴が異なる。では各停留点の判別はどのようにすればいいだろうか。1 次元の場合、関数 $y(x)$ に対して $y'(x)=0$ が停留点の候補であり、$y''(x)>0$ ならば最小点、$y''(x)<0$ ならば最大点、$y''(x)=0$ ならば変曲点となる。2 次元の場合はもう少し複雑で、以下で定義される行列 T を考える。

$$T = \begin{pmatrix} t_{\theta_x\theta_x} & t_{\theta_x\theta_y} \\ t_{\theta_y\theta_x} & t_{\theta_y\theta_y} \end{pmatrix} \tag{67}$$

これは Hesse **行列**として知られている。この行列の det と tr によって停留点を分類できる (表 7.1)。今、(66) 式を 2 回微分すれば

$$T \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_{\theta_x\theta_x} & \psi_{\theta_x\theta_y} \\ \psi_{\theta_y\theta_x} & \psi_{\theta_y\theta_y} \end{pmatrix} \tag{68}$$

を得る。ところで、7.3 節で出てきた inverse magnification tensor $A = \partial\boldsymbol{\beta}/\partial\boldsymbol{\theta}$ と、レンズ方程式 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}$

[*12] 正しくは $\nabla_\theta \Delta t(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ だが、教科書ではこれ以降 Δ を**唐突に、何の宣言もなく**省略しているのでそれに習う。

を用いると

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \partial\beta_x/\partial\theta_x & \partial\beta_x/\partial\beta_y \\ \partial\beta_y/\partial\theta_x & \partial\beta_y/\partial\beta_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial(\theta_x-\alpha_x)/\partial\theta_x & \partial(\theta_x-\alpha_x)/\partial\beta_y \\ \partial(\theta_y-\alpha_y)/\partial\theta_x & \partial(\theta_y-\alpha_y)/\partial\beta_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial\alpha_x/\partial\theta_x & \partial\alpha_x/\partial\beta_y \\ \partial\alpha_y/\partial\theta_x & \partial\alpha_y/\partial\beta_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_{\theta_x\theta_x} & \psi_{\theta_x\theta_y} \\ \psi_{\theta_y\theta_x} & \psi_{\theta_y\theta_y} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{69}
$$

より $T \propto A$ であることが分かる。

ここで $\mu = 1/\det A$ であるから、$T \propto A$ とあわせれば最大点、最小点では $\mu > 0$, 鞍点では $\mu < 0$ であることが分かる。

また、time delay surface の曲率は μ の逆数に比例するので、surface がより曲がっていると像はより暗くなる。例えば 2 つの像が合体する場合を考えてみると、図 7.16 を見ると明らかなように、その周辺では曲率が小さくなるため μ は大きくなる。これより、**天球面上で近い位置にある像は高い magnification を示す。**

天球面上で像が合体する場所を critical lines と呼ぶ。また、対応する背景天体の位置を caustics と呼ぶ。重力レンズの文脈において、image plane (我々が見ているもの), source plane (対応する背景で見えるもの) という呼び方がしばしばなされる。

7.7 Other lens models

singular isothermal sphere model の他によく使われるモデルを紹介する。その 1 つが Navarro-Frenk-White model である。これは dark matter halo の N 体シミュレーションに基づくモデルである。一般に密度プロファイルは

$$
\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_0)^\alpha (1+r/r_0)^{3-\alpha}} \tag{70}
$$

と書け、$\alpha = 1$ としたものが Navarro-Frenk-White profile となる。銀河や銀河団のハローについての表現については未だに議論がなされているが、あるグループは $\alpha = 1.5$ が best fit だとしている。仮にダークマター同士が相互作用する場合、密度プロファイルはより浅くなり、中心での発散の度合いは緩やかになる。

楕円銀河は isothermal sphere を一般化したものによってモデル化される。

$$
\Sigma(\theta_1, \theta_2) = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{{\theta_c}^2 + (1-\varepsilon){\theta_1}^2 + (1+\varepsilon){\theta_2}^2}} \tag{71}
$$

ここで、θ_1, θ_2 は長軸、短軸に沿って測った角度、**ε は楕円率**、θ_c はコア半径である。$\theta_c = \varepsilon = 0$ とすると singular isothermal sphere になる。$\theta_c \neq 0$ とすることは中心での密度発散を均すことを意味する。また、このモデルの代わりに Blandford & Kochanek elliptical density profile がよく使われる。これは、lensing potential が以下で表わされるようなモデルである。

$$
\psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm S}} \frac{4\pi {\sigma_v}^2}{c^2} \left[{\theta_c}^2 + (1-\varepsilon){\theta_1}^2 + (1+\varepsilon){\theta_2}^2\right]^{1/2} \tag{72}
$$

Non-thermal な場合、大括弧の冪が 1/2 より小さくなり、規格化定数も異なるものとなる。この関数形は重力レンズの計算を簡単にするために考えられたものであり、ε が小さい時には妥当な近似ではなくなる。

常にある程度の external shear が存在するので、重力レンズを軸対称で考えることは出来ない。個々のレンズモデルでしばしば以下のような付加的なポテンシャルを考える。

$$
\psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{\kappa}{2}({\theta_1}^2 + {\theta_2}^2) + \frac{\gamma}{2}({\theta_1}^2 - {\theta_2}^2) \tag{73}
$$

convergence κ と shear γ については 7.9 節で解説する。

7.8 Microlensing

1936 年、Einstein は互いに非常に近くにある天体が microlensing と呼ばれる現象を起こすという論文を出した。これはアマチュア天文家の Rudi Mandl に動機づけられ出版されたが、同時期に Eddington や Chwolson からも関連した話題の論文が出ている。

ある星が別の星との間で重力レンズ効果を起こす確率を見積もってみよう。これは star-star lensing であり、(18) 式にあるように Einstein 半径は mas のオーダーである。一方、空の単位立体角にある星の数は銀河面に近づくほど増えるが、込み入った場所 (例えばバルジなど) では大体 1 個のオーダーである。この手前の星が背景の星を lensing する確率は大体 ${\theta_{\rm E}}^2/\rho = 10^{-6}$ 程度である。したがって、同時に 10^6 個程度の星を見ないと microlensing は観測されない (レンズ天体や source の奥行きを考慮するとより正確な議論ができる)。

Einstein の時代には広視野の可視での観測は写真乾板によってのみ行なわれていたが、今では CCD によって microlensing が観測できるようになった。図 7.18 は最初に観測された microlensing のスペクトルであり、長期間の LMC の観測によって得られた。重要なのは、重力レンズ効果が**波長に依存しない**ため、どの色で見ても同じような magnification を示しているという点である。これによって未知の変光星である可能性を棄却できる。

microlensing 探査の当初の目的はダークマターの clump を発見することであり、それを MACHOs (massive compact halo objects) と呼ぶ。MACHOs はブラックホールかもしれないし、非バリオン素粒子の集まりかもしれないし、電磁波を出さないバリオン、例えば惑星サイズの天体や Oort の雲で見つかるような彗星核かもしれない。この観測プロジェクトは 'The MACHO Project' と名付けられているが、この実験では star-star lensing を除外したいため、銀河面から離れたところを観測している。最新のサーベイから銀河のダークマターハローのうち 8 % 以下がコンパクト天体であると考えられている。また、ビッグバン元素合成による $\Omega_{\rm b}$ への制限から、すべてのダークマターがバリオンの clump ではないことが分かっている。

microlensing を考えるためには、理想的には source のサイズと周縁減光の影響を考えなければならないが、ここではレンズ天体が質点であり、かつ距離は宇宙論的ではないとし $D_{\rm LS} = D_{\rm S} - D_{\rm L}$ が成り立つとする。さらに、本来レンズ天体も我々に対して動いているが、今はレンズ天体は静止し背景天体のみが動いていると考える。この概念図が図 7.19 である。幾何学的な関係から

$$\frac{\beta}{\theta_{\rm E}} = \sqrt{\left(\frac{b}{\theta_{\rm E}}\right)^2 + \left[\frac{v}{\theta_{\rm E}} \times (t - t_0)\right]^2} \tag{74}$$

を得る。ここで、b は impact parameter [*13], v は source の角速度、t_0 は最接近時の時刻である。この表式を質点レンズの magnification factor の式に代入すれば、μ が t の関数として書ける。図 7.18 のようなスペクトルが得られている場合、$b/\theta_{\rm E}$, $v/\theta_{\rm E}$, t_0 を fitting parameter として best fit な値を探す。それぞれ、全体の normalization, 曲線の幅、ピークに対応する。一方、$\theta_{\rm E}$ についてはスペクトルの形からは求められないため、b や v を直接求めることは出来ない。

一つの方法は、**レンズが天球面上を $200\,{\rm km\,s^{-1}}$ 程度 (銀河系の星の典型的な速度) で運動していると仮定する**ことである。microlensing の多くのサンプルと、レンズの空間分布に対する仮定からレンズの質量分布が推定できる。この統計的手法は MACHO プロジェクトの当初のアプローチである。

もう一つの方法は視差を使うものである。一般には microlensing はせいぜい 10 日程度の現象だが、100 日程度の長い期間続くような microlensing の場合、地球が公転している影響でレンズとの幾何学的位置が変化する。これを測定することで $\theta_{\rm E}$ やレンズの質量、距離などが分かる。また背景天体が連星をなしている場合、観測される光度曲線に周期的な信号が加わる。これは $\theta_{\rm E}$ を単位にした軌道距離に依存しているので、軌道のパラメータが分かれば $\theta_{\rm E}$ が推定できる。この現象はある意味で parallax と逆の効果なので Xallarap と呼ぶ。

[*13] ここでの単位は角度であることに注意。

MACHO 以外にも EROS や OGLE, MOA などのプロジェクトがあり、microlensing の探査を行っており、現在では主に惑星の発見に利用されている。source **が惑星から** caustic **を横切る際、光度曲線に特徴的な変化が生じるのでそれを観測する。**図 7.18 の最大値周辺の外れ値はレンズの連星系の伴星による影響と考えられる。

最後にクエーサーの重力レンズについて述べておく。クエーサーが前方にある銀河によって重力レンズ効果を受けるとき、continuum や broad emission lines を放射している小さな領域は、レンズ銀河を構成する星による microlensing の影響を受ける。これによってクエーサーの内部構造への手がかりが得られるが、そもそも lensed quasar が珍しいのと、短いタイムスケールのためなかなか観測は難しい。

7.9 Cosmic shear

弱い重力レンズ効果を用いれば宇宙の大規模構造を trace することができる。これは cosmic web の large-scale な物質分布を直接測定し、パワースペクトルの線形な領域 (4 章) を探る手がかりとなる。また階層的 CDM 構造形成モデルのテストや、ダークエネルギーの状態方程式の推定にも利用できる。

この場合には個々の銀河の lensing は弱く複数の像は出来ないが、統計的な銀河の楕円率の傾向が生じる (図 7.20)。銀河はもともと正確に円形ではないため intrinsic な歪みがあるが、これは平均すればほぼ 0 とみなせると考える。

重力レンズによって生じる楕円率の大きさを計算するために、inverse magnification tensor を以下のように書き換える。

$$A = (1-\kappa)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -cos2\phi \end{pmatrix} \tag{75}$$

κ を convergence, γ を shear, ϕ を orientation angle と呼ぶ。convergence は像のスケールを変え、shear は像を特定の方向に引き伸ばす効果を表す。大規模構造による弱い重力レンズ効果のことを cosmic shear と呼ぶこともある。shear ありとなしの場合をシミュレーションしたのが図 7.22。

(75) 式を計算するために、A を以下のように書き直す。

$$A = A - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A)I + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A)I \tag{76}$$

ここで、I は単位行列である。一方、A のトレースは

$$\mathrm{tr}\, A = (1-\psi_{\theta_x\theta_x}) + (1-\psi_{\theta_y\theta_y}) = 2 - (\psi_{\theta_x\theta_x} + \psi_{\theta_y\theta_y}) \tag{77}$$

であるから、$(1/2)(\mathrm{tr}\, A)I$ は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A)I = \begin{pmatrix} 1-(\psi_{\theta_x\theta_x}+\psi_{\theta_y\theta_y})/2 & 0 \\ 0 & 1-(\psi_{\theta_x\theta_x}+\psi_{\theta_y\theta_y})/2 \end{pmatrix} \tag{78}$$

となる。よって、convergence は

$$1-\kappa = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A) = \frac{1}{2}(\psi_{\theta_x\theta_x} + \psi_{\theta_y\theta_y}) \tag{79}$$

と定義される。また、critical density Σ_{cr} との間に $\kappa = \Sigma/\Sigma_{\mathrm{cr}}$ という関係があることも分かる。

次に、以下のように γ, ϕ を定義する。

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{\theta_x\theta_x} - \psi_{\theta_y\theta_y}) = \gamma(\boldsymbol{\theta})\cos(2\phi(\boldsymbol{\theta})) \tag{80}$$

$$\gamma_2 = \psi_{\theta_x\theta_y} = \psi_{\theta_y\theta_x} = \gamma(\boldsymbol{\theta})\sin(2\phi(\boldsymbol{\theta})) \tag{81}$$

A には 3 つの自由度があるため、κ, γ, ϕ の 3 つの変数で表現することも可能というわけである。あとは上の定義から (75) が従う。

実際は cosmic shear を測定することは難しく、安定していてかつしっかりと特徴づけられた PSF (Point Spread Function) が必要となる。これは地上からの観測では達成するのは困難である。また、一般には銀河は local な構造による影響で並ぶ方向に傾向がある。例えば、**レンズの周囲では重力レンズによる shear と垂直方向に見かけの shear が生じる。**現在の考えでは、天球面上で近くに位置する天体は多くの場合 redshift が離れているので、intrinsic な並びの影響は少ないとされている。shear は各銀河の楕円率と PSF を組み合わせて推定するが、軸対称な銀河の場合、長半径 a が $a = (1-\kappa-\gamma)^{-1}$, 短半径 b が $b = (1-\kappa+\gamma)^{-1}$ となる。また、ときどき複素数表示で

$$\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}e^{2i\phi} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \tag{82}$$

と表される。これを image polarization と呼ぶ[*14]。同様に、shear も $\gamma_1 + i\gamma_2$ として複素数表記されることがある。

cosmic shear の強さを測る一つの方法は、**各銀河を photo-z や見かけの等級によって前景銀河と背景銀河に分類し、すべての前景銀河と背景銀河のペアについて shear の tangential な成分を測定する。**そして、ペアの距離の関数として平均的な tangential shear をプロットする (図 7.23)。これは tangential shear が前景銀河によって生じると考えているが、一般には前景銀河は cluster をなしているため、近傍天体からの lensing への寄与もある。だが、これを考慮するのは非常に複雑である。データに系統誤差が含まれているか確認する良い方法として、全体のグラフを 45° 回転させるものがある。**仮に、tangential な成分が重力レンズによるものであれば、回転された信号はほぼ 0 となる。**

redshift の情報がある場合、cosmic web の進化を trace することができる。これは COSMOS プロジェクトによって実際に達成されてきている。図 7.24 は赤経、赤緯、redshift の 3 次元空間でのダークマター分布を示している。また、図 7.25 は total mass の分布 (ダークマターが dominant) と銀河、可視で選択された銀河、X 線で明るい銀河の stellar mass とを比較している。X 線の放射は電子密度の 2 乗に比例するが、宇宙論的なプラズマは全体としてほぼ中性なので、X 線はバリオンが多く分布している高密度な領域を trace する。

大規模構造の進化は宇宙論パラメータに依存し、その中にはダークエネルギーの状態方程式のパラメータ w も含まれている。つまり、cosmic shear は宇宙論パラメータを制限するのにも使える。しかし、cosmic shear からの信号は intrinsic な銀河の並びによるものより大きい一方で、intrinsic な銀河の並びの影響は w が 1 % 変わったことによる影響よりもずっと大きい。

cosmic shear の探索はここ 10 年で大きく進歩してきている。例えば、Pan-STARRS (Panoramic Survey Telescope And Rapid Response System) サーベイは 1.8 m 望遠鏡を用いて太陽系を動く天体を調べていたが、cosmic shear の探索にも利用できるだろうということで今にもそのプロジェクトが始まろうとしている。また、DES (Dark Energy Survey) は 4 m 望遠鏡を使って空の 5000 deg^2 を掃き、弱い重力レンズ効果を観測することで $w(z)$ に制限を与えようとしている。LSST (Large Synoptic Survey Telescope) は Pan-STARRS と似た領域を観測するが、利用する望遠鏡は 8.4 m と大きい。図 7.26 はダークエネルギーの状態方程式のパラメータに対して LSST に要求される sensitivity を表している。これらのサーベイは baryon wiggles や high-z の SN, clustering の進化なども研究対象としている。

intrinsic な銀河の並びの他に、PSF の特徴付けという難しさがある。これには 2 つの解決策が考えられる。1 つは望遠鏡を大気圏外に持っていくことである。現時点で ESA の EUCLID mission と NASA の JDEM が提案されている。どちらも広視野の可視/近赤外の撮像/分光サーベイであり、1.2 ∼ 1.5 m の望遠鏡を用いる。

もう 1 つの方法は電波望遠鏡を使うというものである。電波干渉計であれば地上の可視望遠鏡の limit の影響はなく、高い分解能を実現できる。しかし、大きな領域を掃くのは困難であり、SKA (Square Kilometre Array) の登場が待たれている。これらの future projects は cosmic shear だけでなく強い重力レンズ効果の探索にも利用できる。

[*14] 偏光という意味での polarization とは**全く**関係がないので非常にややこしい terminology である。

7.10 Galaxy cluster lenses

重力レンズを使うことではるか遠くにある天体を見つけることができる。宇宙論的なレンズはなかなかないが、非常に massive な銀河団コアで見つかると期待される。例えば Abel 2218 は mass model に強い制限が与えられている。このようなモデルを得るためには、まず lensed arcs や multiple images を見つけ、銀河団を smooth model (isothermal or NFW) で近似し、それに各銀河の additional mass を M-L ratio を仮定して付け加える。その際、モデルのパラメータは iterative に決める。

Abel 2218 の mass model には 2 ヶ所に mass の集中があり、現在進行形で merger が進んでいることを示唆している。この銀河団は様々な波長でよく研究されており、図 7.27 に示すように異なる波長で非常に深い image が得られている。コアの外部に比べ内部では非常に magnification が高く、$\mu = 2 \sim 10$ 程度が典型的な値である。

Ex 7.11 背景銀河がある redshift で $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}L \propto L^{-\alpha}$ という luminosity function に従うとする。どのような α だと重力レンズによる magnification が source の number counts を増加させるか。ただし、サンプルされる共動体積は減ることに注意せよ。

(解答) 背景天体がすべて同じ redshift にあるので、source counts は $\mathrm{d}N/\mathrm{d}S \propto S^{-\alpha}$ と書ける。よって積分すれば $N(>S_0) = k{S_0}^{1-\alpha}$ となる。ここで、重力レンズ効果により flux が μ 倍になっているとすれば、intrinsic な flux は $S_{\mathrm{int}} = S/\mu$ である。またサンプルされる共動体積は $1/\mu$ 倍になるので、観測される flux が S_0 より大きい天体の source counts は

$$N_{\mathrm{lensed}}(>S_0) = \frac{k}{\mu}\left(\frac{S_0}{\mu}\right)^{1-\alpha} = N(>S_0)\mu^{\alpha-2} \tag{83}$$

と求まる。これより、source counts が増えるためには $\underline{\alpha > 2}$ であればよい。

blank-field survey では confusion limit のため、天体を見つけられる深さに制限がある。しかし、重力レンズを使えば blank field ではなく前景銀河の方向を見ることでこれを回避することが出来る。

レンズ銀河団は超高赤方偏移 (執筆時点で $z > 6$) の候補銀河を見つけるために利用されてきた。これらの候補は photometric redshift により選択され、このぐらいの redshift では Lyman break が dominant である。推定された redshift の確認テストの 1 つとして multiple images **の位置を利用する**ものがあるが、もう 1 つ可視の分光を利用する方法がある。これは推定された redshift から計算される周波数に輝線が見えるかどうかで判断する。系が dusty な場合には必ずしも輝線が見えるとは限らないが、多くの submm で選択された銀河には Lyα があるので試す価値はある。redshift **を確認するためには 2 つの輝線が必要となる (4 章) が、輝線が予想される** Lyα **の位置にある場合、それで確認できたと言っても良い。**しかし、Abel 1835 にある $z \simeq 10$ の重力レンズ効果を受けた銀河は、後に low redshift にある red galaxy とわかった。つまり、元データに人工的な bad pixel が乗りその影響で見かけの輝線が見えたということである。このような false positive な主張をしてしまう可能性は非常に高い。というのも、low redshift の faint red galaxy は ultra-high-redshift galaxy よりもずっと多いためである。

ダークマターはその正体はわからないものの、存在するだろうことは広く認知されている。だが、ダークマターを認めない modified Newtonian dynamics (MOND) という理論や、それに相対論的補正を加えた Tensor-Vector-Scalar theory (TeVeS) と呼ばれる理論がある。MOND/TeVeS は重力レンズによる歪みは銀河団内で見えるバリオンに従うと予想している。**弾丸銀河団**はその主張を確かめるのに都合が良い。弾丸銀

河団は Abel 2218 のように merger の初期段階にある。銀河団のバリオン質量は X 線で明るいガスによって trace され、MOND ではその分布は重力レンズ効果から推定されるものと一致しなければならない。ところがダークマターの相互作用は非常に弱い一方、ガスは強く相互作用する。2 つの銀河団が衝突するとき、2 つのダークマターの '雲' がお互いに向かって落ちていき、そのまま通り抜け反対側へ到達、振動し、最終的に潮汐力によって落ち着く。一方、ガスの '雲' は強く相互作用し、すぐに中心で安定する。弾丸銀河団は X 線で trace した質量と重力レンズで推定される質量の分布が明らかに異なっており、ダークマターが存在しないという理論にとっては難しい問題となっている。

7.11 Finding Gravitational lenses

初めて見つかった重力レンズは 2 つのクエーサー QSO 0957+061 であり、これは電波源の可視における counterpart を探すサーベイで serendipitously に見つかった。

クエーサーが重力レンズ効果を受けることは非常に珍しい。JVAS (Jodrell/VLA Astrometric Survey) や CLASS (Cosmic Lens All-Sky Survey) などによる尽力によって、MERLIN を用いて多くの電波源がフォローアップされ、22/16503 が強い重力レンズ効果を受けていることがわかった。

一方、最初に見つかった重力レンズ天体のように、serendipitously に見つかることもある。図 7.30 の Einstein Cross はその一例であり、近傍銀河の分光観測で見つかった。このような系は 'quad(ruple) lenses' と呼ばれるが、odd-number theorem により中心に demagnified image があるはずである。

number counts や luminosity function の傾きが急になるほど、magnification bias (7.3 節) は大きくなるため、lensed quarsars の探索は high-luminosity 側で行なわれている。このようにして最初に見つかったものの一つとして Cloverleaf lens があり、これも quad lense である。現在、SLOAN survey で spec-z が分かっている 100 000 ものクエーサーから、重力レンズ効果を受けたものを探す SQLS (SLOAN Quasar Lens Survey) というプロジェクトが ongoing で進行している。これは、SLOAN で morphology や color によって選択された候補天体をより高解像度の望遠鏡で観測する。

SQLS の他に SLACS (SLOAN Lens ACS) survey というプロジェクトがあるが、これは SLOAN によって得られたスペクトルから、absorption-dominated redshift combined with nebular emission lines at another, higher, redshift in the same spectrum を探すことで 131 の galaxy-galaxy lenses を発見した。図 7.31 はこのサーベイで見つかったレンズを示している。多くの mass profile は isothermal で近似できるが、light profile とは異なる。また、mass profile は $z \sim 1$ からほとんど進化していないように見える。**多くの銀河は楕円銀河であるが、これは楕円銀河は massive なものが多いため、lensing に対する cross section が大きくなることが関係している。**典型的な Einstein 半径は arcsec 程度であり、レンズの質量は $10^{10-12}\,\mathrm{M}_\odot$ 程度である。レンズ天体は**光度進化が説明できれば local な fundamental plane (3 章) と consistent な関係に乗る。**

submm でのサーベイは number counts が特に bright end で急であるため、magnification bias の影響を受けやすい。執筆時点で SCUBA-2 All-Sky Survey (SASSy) と Hershel ATLAS key project の 2 つのサーベイが予定されている。これらは空を素早く浅い sensitivity で掃き、lensing を受けている珍しい明るい天体を探すことを目的としている。Euclidean slope を占める近傍銀河は optical survey による明らかな近傍銀河との cross-identifications によって排除され、radio-loud な活動銀河は radio survey による cross-identifications によって排除される。これによりレンズの選択効率はほぼ 100 % と期待されている。

もう一つのアプローチとして、人の手によって見た目で銀河を 1 つ 1 つ検証していく方法がある。これを実行したのが Jodrell Bank の Neal Jackson であり、彼は 285 000 もの銀河をチェックし 2 つの新しい強いレンズと、1 つの強いレンズ候補、そして 100 を超えるレンズ候補のリストを書きだした。技術進歩により、コンピュータによって自動で重力レンズ天体を見つけることが可能となったが、それでもソフトウェアによる判断は人間より劣っている。

7.12 Summery

- 重力レンズ効果は surface brightness を保存する。したがって、像の拡大率は増光率と同じである。
- 重力レンズ効果は achromatic であるが、広がった天体に関しては magnification が変わりうる。
- 重力レンズ効果は質量分布が critical mass density の mass sheet の場合を除き光を 1 点に集めない。
- 質点レンズによる光の歪みは Newtonian のアナロジーの 2 倍であり

$$\phi = \frac{4GM}{bc^2} \tag{84}$$

  と書ける。
- 質点レンズによる magnificaiton は常に 1 よりも大きい。これはエネルギー保存則を破らない。
- レンズと source が一直線に並ぶとき、像はリング状になりその半径は

$$\theta_{\mathrm{E}} = \sqrt{\frac{4FM}{c^2}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{S}}}} \tag{85}$$

  である。これを Einstein 半径と呼ぶ。
- 背景天体のある面を source plane, レンズのある面を image plane と呼ぶ。
- non-singular lense は奇数個の像を生じる。これには中心の demagnified image も含み、その flux はレンズ天体の中心における mass profile による。
- source が caustic を通過するとき、新しいペアの像が対応する critical lline 上に現れる。
- magnification bias は source counts に影響を与え、観測される magnification の分布を変化させる。
- microlensing は銀河系や近傍銀河のハローにあるダークマターの探索に用いられる。
- 背景のクエーサーがレンズ銀河中の星によって microlensing を受けるとき、長いタイムスケールで flux が増光される。
- 銀河団コアによる重力レンズ効果は高赤方偏移の銀河を見つけるのに用いられ、しばしば confusion limit よりも深くサーベイできる。flux は増光されるが、共動体積は減る。
- 銀河団による重力レンズ効果は銀河団中のダークマターの分布を mapping するのにも用いられる。
- 大規模構造による弱い重力レンズ効果は、パワースペクトルの線形領域に敏感である。系統誤差がよく特徴づけられている場合、ダークエネルギーの状態方程式を制限できる。
- inverse magnification tensor は magnification や parity, convergence, shear を計算するのに用いられる。