課題研究ゼミ*第 2 回

東京大学理学部天文学科 4 年
泉　拓磨
(学籍番号 05102002)

2011 年 4 月 19 日

概要

前回訳し忘れていたところ＋宿題＋今回の分です。今回から全訳ではなく「まとめ」というふうにしました。時間の都合で図を入れることができなかったので、次回までに改訂版をアップします。。

前回訳し忘れていたところ（p.1599、II 直前の数行）

星の形成過程は、長波長での銀河の観測を通じてもっと大きなスケールでも研究されている。とりわけ面白いのが、”starburst”や”ultraluminous IR galaxy”(ULIRGs)[70] というもので、銀河同士の衝突や合体によって星間ガスが圧縮されてショックを受け、劇的な星形成のトリガーになる、というものである。ミリ波や遠赤外での分光 [71]-[76] により新たに形成された大質量星（もしくはそれに引き続く超新星爆発）により加熱された温かい分子ガスや原子ガスについて有益な情報が得られるし、干渉計 [77] を用いると多くの活動が起きているこれらの銀河の中心の詳細な画像を得ることもできる。同様のプロセスで、サブミリで明るい high-z 銀河の特性が説明できるかもしれない [78]-[80]。将来、冷たい宇宙望遠鏡と、非常に高感度で相応の分解能のある直接検出分光器を用いてこういった遠方銀河の物理を研究することが可能になるかもしれない [18]。

宿題 $+\alpha$

スニヤエフ・ゼルドビッチ（SZ）効果

エネルギー $\gamma m_e c^2$ の高エネルギー電子がエネルギー $E_{ph} = h\nu$ の光子に衝突し、光子がよりエネルギーの高いもの（$E_{ph'} = h\nu'$）になる。この現象を逆コンプトン散乱という。高エネルギー電子は銀河団の中にプラズマとして存在し、光子は CMB として豊富にある。よって、銀河団プラズマが CMB を散乱し、その結果 CMB の分布は非当方的になる。CMB を黒体輻射で近似すると、散乱前後でスペクトルはピーク周波数より低い周波数領域では低下し、高い周波数領域では増加して観測されることになる。これがスニヤエフ・ゼルドビッチ効果である。銀河団までの距離決定などに使える。

波長分解能と速度

分解能を R とすると、

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c}{\delta v} \tag{1}$$

たとえば $R = 3 \times 10^4$ とすると、$\Delta v = 10\mathrm{km/s}$ となる。見たい対象に応じた分解能が必要。

ショットキー効果

金属と半導体の接合面に生じるポテンシャル障壁をショットキーバリアという。ショットキーバリアの順方向（金属側が正）に電圧を加えると、半導体内の伝導電子が半導体側から金属側へと容易に流れるので電流が走る。この電流が非線形性をもつのでミクサーに使える。

ヘテロダインの量子限界

（まず面倒なのでハットは省略）

演算子 A、B が $AB - BA = iC$ となるとき、$<(\Delta A)^2><(\Delta B)^2> \geq <C>^2/4$ となる。（光子）数密度演算子 N は生成・消滅演算子を用いて $N = a^\dagger a$ と書ける。これには位相の不定性が残るので、位相演算子として ϕ を導入すると

$$\begin{aligned} a &= e^{i\phi}N^{1/2} \\ a^\dagger &= N^{1/2}e^{-i\phi} \end{aligned} \tag{2}$$

と書ける。生成・消滅演算子の交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を用いると、

$$e^{i\phi}N - Ne^{i\phi} = e^{i\phi} \tag{3}$$

この指数部分をテイラー展開すると、近似的に交換関係 $[N, \phi] = i$ を得る。よって $<(\Delta N)^2><(\Delta\phi)^2> \geq 1/4$ なので

$$\sqrt{<(\Delta N)^2><(\Delta\phi)^2>} \geq \frac{1}{2} \tag{4}$$

従って、粒子の個数と位相は不確定性関係にある。

周波数変換器

非線形素子を用いる周波数変換を確かめる。半導体ダイオードを例にとると、その I-V 特性は

$$I = I_0 \exp\left(\left(\frac{V}{V_0}\right) - 1\right) \tag{5}$$

の形になる。ただし $V_0 = \eta kT/e$ である。この exp を展開すると、

$$I = I_0\left[1 + \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 + \cdots\right] \sim I_0\left(1 + \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^2\right) \tag{6}$$

となるので、たとえば二乗特性のある素子を用いると、前回のゼミでも出た差周波を取りだすことができる。

雑音

雑音の評価

(i) まず、雑音を定量的に量るために雑音温度を導入する。インプット S_i が G 倍に増幅される増幅器に入り、アウトプット S_o として出てきたとする。しかしこの段階で、アウトプットには増幅器由来の雑音 N が乗っている。よって、

$$S_o = GS_i + N \tag{7}$$

仮にこの N がノイズゼロの増幅器の入力端から入ったとする。つまり

$$S_o = G(S_i + \frac{N}{G}) \equiv G(S_i + N_{eq}) \tag{8}$$

と書く。この N_{eq} を入力換算雑音という。すると、ナイキストの式より

$$N_{eq} = \frac{N}{G} = kT_n\Delta\nu \tag{9}$$

これを変形して、入力換算温度として

$$T_n = \frac{N_{eq}}{k\Delta\nu} \tag{10}$$

を得る。

(ii) 次に雑音指数 F を考える。F は入出力の S/N 比で定義される。

$$F = \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}} = \frac{S_i/N_i}{GS_i/G(N_i + N_{eq})} = 1 + \frac{N_{eq}}{N_i} \tag{11}$$

ただし N_i は増幅器に入力される雑音である。この結果をデシベルで表示すると

$$NF[\mathrm{dB}] = 10\log(1 + \frac{N_{eq}}{N_i}) \tag{12}$$

多段回路の雑音

G_1 倍になる増幅器 1 と G_2 倍の増幅器 2 が直列につながっているとする。このときの雑音温度を評価する。各々の入力換算雑音を $N_{eq,1}$、$N_{eq,2}$ とすると、入力換算雑音温度は

$$T_{n1} = \frac{N_{eq,1}}{k\Delta\nu}、T_{n2} = \frac{N_{eq,2}}{k\Delta\nu} \tag{13}$$

一段目の雑音出力 $GN_{eq,1}$ を 2 段目に入力させると $N_{eq,2}$ が足されたうえで G_2 倍されるので全体での入力換算雑音は

$$N_{eq,t} = \frac{G_2(G_1N_{eq,1} + N_{eq,2})}{G_1G_2} = N_{eq,1} + \frac{N_{eq,2}}{G_1} \tag{14}$$

よってこの系全体の入力換算雑音温度は

$$T_{n,t} = \frac{N_{eq,t}}{k\Delta\nu} = T_{n1} + \frac{T_{n2}}{G_1} \tag{15}$$

一段目に比べ、二段目の雑音温度は G_1 分の一になる。よって受信機では一段目の雑音を減らすことが大事になる。もし一段目がミクサのように増幅ではなく損失を伴うなら、$G < 1$ とすればよいので、このときは二段目の低雑音化が大事になる。また、多段式の場合、以上を参考にすると

$$T_{n,t} = T_{n1} + \frac{T_{n2}}{G_1} + \frac{T_{n3}}{G_1 G_2} + \cdots \tag{16}$$

となり、後段に行くほど全体へは影響を及ぼさないことがわかる。

熱雑音（ジョンソンノイズ）

実際の抵抗 R には必ず静電容量 C がある。そこに蓄えられるエネルギーは

$$E = \frac{1}{2} C \bar{v}^2 \tag{17}$$

ただし v は抵抗にかかる電圧である。ここで、

$$\bar{v}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)^2 dt \tag{18}$$

温度 T の熱平衡にあるとして $E = \frac{1}{2} kT$ なので

$$\bar{v}^2 = \frac{kT}{C} \tag{19}$$

また、この回路の時定数は $\tau = RC$ である。この回路の自己相関関数 $R(\tau)$ は

$$R(\tau) = \overline{v(t)v(t+\tau)} = \bar{v}^2 \exp(-\frac{\tau}{RC}) \tag{20}$$

これをフーリエ変換してパワースペクトルをとると

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{2\bar{v}^2}{\pi} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{aligned} \tag{21}$$

この回路の複素インピーダンスを Z として低周波の条件下でパワースペクトルを積分すると

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{Re(Z)} \int_0^{\omega} G(\omega) d\omega \\ &= \frac{2\bar{v}^2}{\pi Re(Z)} \int_0^{\omega} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ &= \frac{2kT}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{1}{1 + \omega^2 (RC)^2} \\ &\sim \frac{2kT}{\pi} \int_0^{\omega} d\omega = \frac{2kT}{\pi} \cdot 2\pi\nu = 4kT\nu \end{aligned} \tag{22}$$

これがナイキストの熱雑音の式である。

ショットノイズ

半導体中を流れる電子の数の統計的ゆらぎに起因する。電荷 e の電子が回路を t 秒間で N 個流れるとすると、電流 I は

$$I = \frac{eN}{t} \tag{23}$$

となる。これの平均をとると

$$\bar{I} = \frac{e\bar{N}}{t} \tag{24}$$

電子の流れが Poisson 分布に従うと仮定すると、

$$\overline{(N - \bar{N})^2} = \bar{N} \tag{25}$$

すると雑音のパワー P は

$$P \propto \overline{(I - \bar{I})^2} = \frac{e^2}{t^2}\overline{(N - \bar{N})^2} = \frac{e^2\bar{N}}{t^2} = \frac{eI}{t} \propto I \tag{26}$$

よってショットノイズは電流 I に比例する。

マイクロフォニック雑音

外部の機械振動が回路の雑音に変化することがある。冷却回路の冷凍機の振動等に注意すべきである。

量子雑音

エネルギー、粒子数、縮退度がそれぞれ（E_1, n_1, g_1）、（E_2, n_2, g_2）の二準位系からなる増幅器を考える。この系の雑音の下限値を見積もる。アインシュタイン係数として A、B を用い、

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2}B_{21}、g_1 B_{12} = g_2 B21 \tag{27}$$

である。今、簡単のために $g_1 = g_2 = 1$ つまり $B_{12} = B_{21} = B$ とする。この系が長さ ds の導波管の中にあるとして、フラックスを I_ν とすると、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi}[n_2(A_{21} + I_\nu B) - n_1 I_\nu B] \tag{28}$$

となる。さらに、熱平衡を仮定してボルツマン分布を用いると

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp(-\frac{E_2 - E_1}{kT}) \tag{29}$$

ただし $n_2 > n_1$ と考えている。以上をまとめて計算すると、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \alpha[I_\nu + \beta\frac{n_2}{n_2 - n_1}h\nu] \tag{30}$$

ただし、

$$\alpha = \frac{h\nu}{4\pi}(n_2 - n_1)B、\beta = \frac{2\nu^2}{c^2} \tag{31}$$

この微分方程式を解くと、

$$I_\nu = e^{\alpha s} I_{\nu,0} + (e^{\alpha s} - 1)\beta \frac{n_2}{n_2 - n_1} h\nu \tag{32}$$

$I_{\nu,0}$ は $s = 0$ でのフラックス、つまりインプットである。$I_{\nu,0} = 0$ とするときの I_ν が雑音によるパワー P_ν である。

$$P_\nu = (e^{\alpha s} - 1)\beta \frac{n_2}{n_2 - n_1} h\nu \tag{33}$$

$n_2 >> n_1$ のとき、$e^{\alpha s} - 1 \sim e^{\alpha s}$ となる。このとき、

$$\frac{P_\nu}{e^{\alpha s}} \sim \beta h\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \tag{34}$$

従って

$$T = \frac{h\nu}{k} \tag{35}$$

を得る。これが量子雑音である。

II-B. Device physics(p.1599〜)〜

ボロメータの基本

ボロメータは吸収体の温度変化を温度計で測定する検出器であり、吸収体、温度計、サーマルリンク、熱浴からなる。入射するオプティカルパワーを P_{opt}、バイアス由来のオプティカルパワーを P_b、吸収体の熱容量を C、熱浴の温度を T_0 とする。サーマルリンクでの平均の熱伝導率 $\bar{G}$ は

$$P = \bar{G}(T - T_0) \tag{36}$$

である。ここで、T は入射するフラックスを吸収した後の検出器の温度である。温度の上昇幅を ΔT と置くと、$T = T_0 + \Delta T$ なので

$$P = \bar{G}\Delta T \tag{37}$$

このとき瞬間の熱伝導率は

$$G = \frac{dP}{dT} \tag{38}$$

このときの ΔT の温度変化で抵抗の値の変化を調べる。また、発生した熱はサーマルリンクを通じて熱浴へ逃げるので

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = -G\Delta T \tag{39}$$

式 (39) を解くと、

$$\Delta T(t) = A\exp(-\frac{G}{C}t) \equiv A\exp(-\frac{t}{\tau_0}) \tag{40}$$

である。ここで $\tau_0 \equiv C/G$ はこの温度変化の時定数。

TES

超伝導遷移する様子を表す T-R 図の傾きを log で表すと、

$$\alpha \equiv \frac{d\ln R}{d\ln T} = \frac{R}{T}\frac{dR}{dT} \tag{41}$$

と書ける。この α の値は、超伝導体を用いると半導体に比べて 2 桁程度大きい。原理的に、ボロメータを TES の遷移温度 T_c に保たないといけない。

また、そもそもの T_c の値の設定（設計）には薄膜効果や近接効果といったものが用いられる。

電熱フィードバック（ETF）

TES はダイナミックレンジが非常に小さいので、動作温度は常に T_c 付近で一定に保たなければならない。よってネガティブフィードバックをかける。TES にはそれ自身よりずっと抵抗値の小さいシャント抵抗を並列接続することでほぼ一定なバイアス電圧 V_b がかかっている。このときの発熱のパワー P_b は

$$P_b = I_{TES}V_b = \frac{{V_b}^2}{R_{TES}} \tag{42}$$

となる。この温度依存性を見ると、

$$\frac{dP_b}{dT} = \frac{dP_b}{dR_{TES}}\frac{dR_{TES}}{dT} = -\frac{{V_b}^2}{{R_{TES}}^2}\frac{dR_{TES}}{dT} < 0 \tag{43}$$

最右辺は負なので、確かにネガティブフィードバックがかかっている。いま、ボロメータで吸収される全パワー P は、

$$P = P_{opt} + P_b \tag{44}$$

である。今、入射した P_{opt} の微小変化として $\delta P_{opt}\exp(i\omega t)$ を考える。これによって温度変化 $\delta T\exp(i\omega t)$ が生じる。ボロメータのエネルギー保存を書くと、

$$P+\delta P_{opt}\exp(i\omega t)-\frac{{V_b}^2}{{R_{TES}}^2}\frac{dR_{TES}}{dT}\delta T\exp(i\omega t) = \bar{G}(T-T_0)+G\delta T\exp(i\omega t)+i\omega C\delta T\exp(i\omega t) \tag{45}$$

時間依存する項とそうでない項に分けて、それぞれをイコールで結ぶと

$$\begin{aligned} P &= \bar{G}(T-T_0) \\ \delta P_{opt} &= (\frac{{V_b}^2}{{R_{TES}}^2}\frac{dR_{TES}}{dT} + G + i\omega C)\delta T \end{aligned} \tag{46}$$

ここで、α を用いると

$$\frac{{V_b}^2}{{R_{TES}}^2}\frac{dR_{TES}}{dT} = \frac{P_b}{T}\alpha \tag{47}$$

よって式 (46) は

$$\delta P_{opt} = (\frac{P_b}{T}\alpha + G + i\omega C)\delta T \equiv G_{eff}\delta T \tag{48}$$

定電圧ボロメータでは出力信号はバイアス電流の変化として検出される。電流応答を

$$S_I \equiv \frac{dI}{dP_{opt}} \tag{49}$$

で定義する。このとき、

$$d_I = \frac{dI}{dR_{TES}} dR_{TES} = -\frac{V_b}{{R_{TES}}^2} dR_{TES} \tag{50}$$

$$dP_{opt} = (\frac{P_b}{T}\alpha + G + i\omega C)dT \tag{51}$$

を合わせると、

$$\frac{dI}{dP_{opt}} = \frac{V_b}{{R_{TES}}^2} dR_{TES} \frac{1}{\frac{P_b}{T}\alpha + G + i\omega C} \frac{1}{dT} = -\frac{1}{V_b}\frac{L}{L+1}\frac{1}{1+i\omega\tau} \tag{52}$$

ただし、$L = \alpha P_b/GT$ でループゲイン、$\tau = \tau_0/(L+1)$。以上より、

$$S_I = \frac{dI}{dP_{opt}} = -\frac{1}{V_b}\frac{L}{L+1}\frac{1}{1+i\omega\tau} \tag{53}$$

$L \gg 1$ かつ $\omega \ll 1/\tau$ の低周波では $S_I \sim -1/V_b$

ボロメータの雑音

ノイズを NEP（Noise Equivalent Power）で評価する。NEP は検出器の感度を表す指標で、1Hz 帯域でのノイズと等価（S/N=1）になる入射電力である。

$$\frac{S}{N} = 1 = \frac{(NEP)B^{1/2}}{P_N} \tag{54}$$

である。ここで、B は考える帯域幅、P_N は雑音のパワーである。系の中の異なるソースからの雑音を考慮してトータルの NEP を書くと、

$$NEP_{tatal}^2 = NEP_1^2 + NEP_2^2 + NEP_3^2 + \cdots \tag{55}$$

と表すことができる。この NEP を入射電力 $P = nh\nu$ で表すと、

$$NEP_{inc} = \sqrt{2Ph\nu}\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2} \tag{56}$$

となる。$\sqrt{2}$ は積分時間が 0.5 秒であることによる。この式は光子がランダムに飛んでくることを仮定しているものだが、サブミリ波領域では光子は B.E. 統計に従うので光子の集団としてのコヒーレントなゆらぎが生じ、ランダムに飛来する場合に比べてゆらぎが大きくなる。光子バンチングと呼ばれる。これを考慮すると、

$$n' = \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} \tag{57}$$

を用いると、入射光子のゆらぎは

$$n_{rms} = \sqrt{\eta n'(1+\eta n')} \tag{58}$$

と書けて、これを NEP で表すと、

$$NEP = \sqrt{2P(kT_B + h\nu)}\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2} \tag{59}$$

であり、この T_B はレイリージーンズ温度である。第 1 項がコヒーレントなゆらぎ、第 2 項が統計的なゆらぎに対応している。周波数が下がる or 入射電力が増加するとコヒーレントの割合が大きくなるので、サブミリ波帯ではこの効果も考慮すべきである。

具体例として目安を挙げると、地上観測では NEP$\sim 10^{-17}\mathrm{W}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2}$、スペース観測（測光）では $\sim 10^{-18}$、スペースの分光では $\sim 10^{-20}$ である。

ボロメータの効率

ボロメトリックな検出器はフィルターでバンドを制限している。しかし、天体からの光は主に電波より短波長側のものが強度が強いので、こういった光をさえぎるのは難しい。また、入射した光が全て検出されるわけではなく、一般にボロメータの効率は 40〜80% である。

C.TES カロリメータ

TES は電波特有ではなく、その考え方は光学からガンマ線に至るまで利用されている。光子のエネルギーが吸収される時間は、装置の熱緩和時間より短いのでパルスの高さは入射光子のエネルギーに比例する。このモードで用いられる検出器をカロリメータという。光子のフラックスを測るだけでなく、高分散なスペクトルを得ることができる。

D.TES ボロメータの設計

TES が用いられるであろう波長域はアンテナやモノリシックマイクロ波集積回路（MMIC）のミリ波技術から密にパッケージされたフォトン検出器のような IR 技術の間にある。TES ボロメータに用いられた製造技術はとても柔軟なもので、特定の観測目的にかなうように特別な検出器が開発中である。

図 2 の 1024pix のボロメータアレイ構造は遠赤外望遠鏡の焦点面にあるような密に配置されたアレイを開発するまでの一つのステップを示している [91]。図 3 に単一のピクセルが示されている。吸収材となるのは横幅数波長分の $1\mu m$ の厚さの LSN による正方形のメッシュであるが、それは平均 377Ω/square のシート抵抗を生むように金でコーティングされている。