# 課題研究ゼミ＊第4回

東京大学理学部天文学科4年
泉　拓磨

2011年5月17日

**概要**

今回も主に訳した文章です。前回の残りから。

## III-E：SIS 光子検出器

セクション IV-B で議論されるように（図 9)、超伝導（SIS）トンネル接合は光子によるトンネリングでサブミリ光子を直接電流に変換し、その感度は光子 1 個につき電子 1 個である。この効果はヘテロダイン混合用に広く使われているが、直接検出でも用いられている。この装置の感度はリーク電流で決まるが、それはアンテナによく適合する低ノイズな接合でより高くなる。それでもなお、その幅での NEP として $10^{-16}\mathrm{WHz}^{-1/2}$ が達成可能なようである。そしてこの装置は天文学的用途のために活発に開発されている。

*****

SIS 光子検出器の性能を電流感度 $S$、リーク電流のショット雑音 $N$、および $NEP$ で表すと

$$S = \eta \frac{e}{h\nu} \tag{1}$$

$$N = \sqrt{2eI_0} \tag{2}$$

$$NEP = \frac{h\nu}{\eta}\sqrt{\frac{2I_0}{e}} \tag{3}$$

となる。ただし $\eta$ は量子効率、$I_0$ はリーク電流。たとえばリーク電流が 100pA、量子効率が 50% のときは $NEP = 3 \times 10^{-17}\mathrm{WHz}^{-1/2}$ となる。リーク電流には SIS 素子の温度に依存する成分と接合の不完全生に依存する成分がある。前者は温度を下げると十分減らすことができるので問題は後者。検出性能を上げるには接合の不完全生によるリーク電流を減らすことが重要である。

## III-F：SIN 接合マイクロボロメータ

SIN トンネル接合は電極の一つが通常の金属という点で SIS 接合と異なっている（図 8)。電子が金属から超伝導体にトンネルするために、最低でも $\Delta - eV_b$ のフェルミレベル以上のエネルギーを持っている必要がある。ここで、$\Delta$ は超伝導体のギャップパラメータ、$V_b$ は接合のバイアス電圧である。それゆえ、接合電流は通常の金属中の電子のフェルミ分布の後ろを探ることになり、結果として電子温度 $T_e$ に $\exp(-(\Delta - eV_b)/k_BT_e)$ でスケーリングされた exp の感度を持つことになる。それゆえ SIN 接

合は通常金属中の電子温度を測るよい温度計となる。この特性は Nahum と Martinis によって熱電マイクロボロメータを設計するのに用いられた。そこでは吸収された輻射は通常金属中の電子を加熱し、$T_e$ の上昇は SIN 接合を用いて測定される。SIN マイクロボロメータはトンネルした電子が通常金属から熱を運び出すのでネガティブフィードバックを受けることになる。こういった装置の理論はいくらか詳細に発展していて、アンテナと結合した検出器の実験的な特徴付けが今現在なされているところである。そして dcSQUID 読み出しの利用が研究されている。

# 関連事項

## 電波望遠鏡の雑音

前回の多段回路の雑音の式を用いると

$$T_{sys} = T_{atm} + \frac{T_{ant}}{G_{atm}} + \frac{T_{RX}}{G_{atm}G_{ant}} \tag{4}$$

L=1/G として

$$T_{sys} = T_{atm} + L_{atm}T_{ant} + L_{atm}L_{ant}T_{RX} \tag{5}$$

ただし $T_{RX}$ は受信機雑音温度。

## サンプリング定理

アナログ信号をデジタル化するときに、どの程度の間隔でサンプリングすれば、元の信号の情報損失はなくなるか？

→仮定：元の信号は帯域制限されている（ある最大周波数 $\omega_{max}$ 以下の周波数成分しかない）サンプリングするときのパルス列を

$$s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \tag{6}$$

とする。T はサンプリング周期（一定とする)。入力信号を $g(x)$、出力信号を $p(x)$ とすると、

$$p(x) = g(x)s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(x - nT) \tag{7}$$

ここで p(x) の周波数成分の計算のため、s(x) を複素フーリエ級数展開。

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum \delta(x - nT) \\ &= \sum c_n e^{2\pi inx/T} \\ &= \sum (\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\sum \delta(x - nT))e^{-2\pi inx/T}dx)e^{2\pi inx/T} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_s x} \end{aligned} \tag{8}$$

ただし $\omega_s = 2\pi/T$ である（サンプリング周波数)。このフーリエ変換をとると

$$\begin{aligned}\tilde{s}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_s)\end{aligned} \tag{9}$$

次に $p(x)$ のフーリエ変換をとる。$p(x)$ が畳み込みの形になっているので、

$$\begin{aligned}F[p(x)](\omega) &= F[g(x)s(x)](\omega) \\ &= \tilde{g} * \tilde{s} \\ &= \tilde{g}(p)\tilde{s}(\omega - p) \\ &= \frac{1}{2\pi T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\omega - n\omega_s)\end{aligned} \tag{10}$$

p のフーリエ変換は $\tilde{g}(\omega)$ を幅 $\omega_s$ で繰り返したものになっている。$|\omega| > \omega_{max}$ では $\tilde{g}(\omega) = 0$ であることと合わせると、$\omega_s > 2\omega_{max}$ なら $F[p](\omega)$ の $-\omega_s < \omega < \omega_s$ の区間ではそれはすなわち $F[g](\omega)$ に等しく（重なりがないから)、この区間に制限した関数を今度は逆フーリエすることで完全に元の $g$ を復元できる。

しかし、$\omega_s < 2\omega_{max}$ だと周期的に繰り返す信号同士で重なる部分が出てきて、逆フーリエしても完全に元の $g$ を復元することはできない。

## 搬送波

キャリアとも。通信で情報を送るための信号のこと。光や音などの波動を利用。搬送波を変調することで波動にデータを乗せ、復調することでデータを復元する。周波数帯ごとにデータを割り当てることで多重化が可能。

## 多チャンネル測定のときの信号の区別

多チャンネル測定の場合の話。信号をどの方向から来たのか、きちんと弁別する必要がある。

### スイッチング方式

信号のタイミングを変えることで識別。しかし、この方法では全てのチャンネルを測定するには時間分解能に限界がある。

### ロックイン方式

異なる周波数で変調。高い周波数で信号のオンオフを繰り返す。合成された信号は複数の周波数を含むが、特定の周波数だけ取り出すロックイン式なら全ての信号を同時に識別可能→高 SN 比を実現。

## 近接効果

超伝導体に常伝導体を接合すると、クーパーペアが常伝導体側にしみ出し、常伝導体が超伝導性を示す現象。しみ出しの範囲は数十 $\mu m$ にもおよぶ。

## SQUID

TES が低インピーダンスなので、読み出し回路として超伝導を用いた高感度な磁束計である SQUID（超伝導量子干渉計）を用いることができる。SQUID は Josephson 接合の入った超伝導ループによって作られていて、ループ中に Josephson 接合が 2 つあり直流で作動させるものを dc-SQUID と呼ぶ。Josephson 接合が 1 つで、RF 磁場で作動させるものを ac-SQUID という。以下は dc-SQUID の話である。

### dcSQUID

TES の出力電流の読み出しに dcSQUID が使われているときの簡単な原理は以下の通り。オプティカルパワーの変化によって TES の抵抗値が変化することで、出力電流も変化する。その変化を TES と直列につないだインプットコイルで磁場の変化に換算。そしてその磁場の変化を高感度磁束計である SQUID を用いて読み出し、電圧として出力する。インプットコイルと SQUID は可能な限り近づける。その相互インダクタンスは

$$M = \alpha\sqrt{L_{in}L_{SQUID}} \tag{11}$$

である。ここで $\alpha$ は距離に依存するファクター、$L$ は自己インダクタンスである。dcSQUID は超伝導ループの中に Josephson 接合を 2 個含む形になる。接合部分を流れる Josephson 電流は接合の両端の位相差で決まるが、その接合の位相は勝手な値を取るわけではなく、ループをつらぬく磁束が磁束量子 $\Phi_0$ の整数倍になる。つまり、2 つの Josephson 接合での位相をそれぞれ $\theta_1$、$\theta_2$ とし、ループをつらぬく磁束を $\Phi$ とすると

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{12}$$

という関係がある。磁束量子 $\Phi_0$ は

$$\Phi_0 \equiv \frac{h}{2e} = 2.06 \times 10^{-15}\mathrm{Wb} \tag{13}$$

となる。$e$ は電子の電荷。Josephson 接合が超伝導状態のときは、バイアス電流 $I_B$ は

$$I_B = 2I_0\cos(\pi\frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0})\sin(\theta_1 - \pi\frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}) \tag{14}$$

と表すことができる。ただし $I_0$ は Josephson 接合の臨界電流。$\Phi_{ext}$ は外部磁束で、インプットコイルに流れる電流を $I_{in}$ として

$$\Phi_{ext} = MI_{in} \tag{15}$$

と書ける。式 (14) より、$I_B$ の最大値は

$$I_{max} = 2I_0|\cos(\pi\frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0})| \tag{16}$$

となって臨界電流値は SQUID のループをつらぬく外部磁束 $\Phi_{ext}$ の変化で周期的に変化するとわかる。

# IV：TUNNEL JUCTION (SIS) MIXERS

## IV-A： Introduction

超伝導体-絶縁体-超伝導体のサンドイッチ構造を接合に持つことで SIS ミクサーとして知られる、STJ ミクサー（図 8）は、よく知られた半導体ダイオードミクサーの高性能バージョンと考えられている。ダイオードミクサーではミクシングは古典的な効果として考えられていて、これはダイオードに入る RF 波形の整流に起因するが、これはつまりダイオードの電流電圧特性が非線形であることによる。しかし、SIS ミクサーでは装置の扱いで量子力学的な観点を持つことが必要である。その観点に立てば、出力電流は光子にアシストされた電子のトンネル効果によるものと考えられる。この効果の物理は 1960 年代初頭に Dayen と Martin により実験的に示されたし、Tien と Gordon によって理論的に説明された。SIS ミクシングの最初の実例は、適切な小面積の SIS 接合が開発された後の 1979 年に発表された。Phillips と Woody が初期の SIS の研究についての興味深いサマリーを出している。より包括的なこの分野のレビューは Tucker と Feldman により 1985 年に出された。この論文は現在でも SIS ミクサーの基本的なレファレンスとして役に立つ。後続するレビュー [45],[50],[169]-[172] はもっと最近の開発を要約している。

## IV-B：Basic Physics and Limitations

photon-asisted トンネリングの基本物理は図 9 と図 10 に示されている。まとめると、超伝導体中の状態の電子密度における $2\Delta$ のエネルギーギャップが、バイアス電圧 $V_b$ がトンネル電子にギャップを超えるのに十分なエネルギーを与えるまで電子が接合を超えてトンネルすることを防いでいる。それゆえ、図 10 に示されているように、電流は $V_b > 2\Delta/e$ で急になる。だが、周波数 $\nu$ の RF 信号を考えると、photon-assisted トンネリングは可能で、それは $V_b > 2\Delta/e - h\nu/e$ で起こる。

つまり、SIS 接合は可視や IR での光子検出器と非常によく似た振る舞いをする。出力電流は光子 1 個が電子 1 個になったものである。実際、この単純で直接的な描像は SIS の設計と運用の基本的な部分を説明することができる。この描像では鍵となるメリットは量子効率 $\eta < 1$ となることで、SIS 接合で吸収された入射光子がトンネル電子になる全体の確率を表す。カップリング構造をよく考えて設計し、特に SIS 接合とのインピーダンス整合に注意を払うと、理想極限として $\eta \to 1$ が得られる。ある量子効率 $\eta$ が与えられたときに、最良の雑音温度は $k_B T_n \geq h\nu/\eta$ で得られる [single side band(SSB)]。フォトダイオードの描像では SIS ミクサーで最も重要な周波数への制限の一つも説明できる。それは $h\nu > 4\Delta$ というもので、光子のエネルギーが十分に大きくて、photon-assisted トンネリングの逆過程が起こることを意味している。すべての Nb SIS 接合では限界は $\nu \leq 1.4$THz である。1.6THz 程度までの運用は NbN か NbTnN が少なくとも一方の電極に用いられると可能だろう。

フォトダイオードの描像を超えて、詳細なシミュレーションやミクサー回路の理想化がしたいときには、もっと包括的なっ論が必要になる。この理論は Tucker により提案されたが、彼は Tien-Gordon 解析とトンネル接合のノイズ理論をミクサーとして用いられるトンネル接合の信号とノイズの特性を完全に記述できるところまで拡張した。Tucker の理論は半古典的で、接合は量子力学的に取り扱われるが、輻射場は古典的に扱われる。完全に量子的なアプローチに拡張することは難しくはなく、SIS 受信機シ

ステムの感度は量子限界の $T_n \geq h\nu/k$(SSB) に達することはできるがこれ以上よくなりはしないことを示している。Tucker 理論を用いた詳細な設計計算には LO の波形を求める非線形問題の解を求めることを含む相当な計算が必要だが、それは典型的にはハーモニックバランステクニックを用いて行われる。安定性の問題も非常に重要である。超伝導 RF 回路を含むマルチジャンクション回路用の計算をするための高度なソフトウェアパッケージが利用可能である（図 10)。

## IV-C：Design Approaches

典型的なトンネル接合の大きさは $\sim 1\mu m$ である。この大きさは受信される信号の波長よりもずっと小さいので、アンテナとそれにカップルしている回路は輻射を接合部分まで導く必要がある。このことを成し遂げるには主に 2 つの方法がある。ウェーブガイドカップリングと半光学的カップリングである。その二つのうち、昔からあるマイクロ波工学のアプローチはウェーブガイドカップリングで、そのやり方では輻射はまずホーンで単一モードのウェーブガイドに集められる。典型的には長方形型のウェーブガイドである。ここで、ウェーブガイドからの電波と SIS チップ自身の上のリソグラフされた薄膜状の伝送路とを結ぶ遷移や「プローブ」が必要になる。このアプローチの例はたくさんあるので図 11 を見よ。最近の三次元電磁波シミュレーションソフトを用いると、ウェーブガイドの全バンド帯においてすばらしい性能を発揮するプローブを設計することが可能である。ウェーブガイドのアプローチの一つの大きな問題点は、ミクサーのチップは非常に幅が狭くなり、非常に薄い基板上に作らないといけないことだ。現代の微細加工技術はこの点において有用で、ミクサーの組み立ては SIS チップ上のビーム線を集積することで簡単化される。

もう一方の主要なアプローチは半光学的カップリングで、図 12 に示されている。この場合、輻射をウェーブガイドへ集める途中過程がカットされて、代わりに SIS チップそれ自体の上にあるリソグラフされたアンテナを用いる。こういったミクサーは製造がかなり簡単になり、厚い基板を用いて製造される。この手のミクサーの最初のものは蝶ネクタイ型のアンテナを用いていた。それは広帯域ではあったのだが、非理想的なビームパターンを得てしまった。後続する実験的 · 理論的研究によりアンテナとレンズを最大限活用することで 90% のカップリング効率が達成できることが示された。2 偏光用の装置設計も可能である。平面アンテナの計算は普通は厳密なモーメント法を用いて行われて、レンズの効果は光線の追跡と回折の計算、そして時々内部反射も含めて評価される。

## IV-D：Tuning Circuits,Materials Properties, and Terahertz Operation

SIS ミクサーの設計で、一つの主要な挑戦の一つがトンネル接合とのインピーダンス整合をとることである。トンネル接合はわずか $\sim$1nm の絶縁体で隔てられた 2 枚の電極による平行平面構造をしているのでとてもキャパシタンスが高い。接合に特有のキャパシタンスの典型値は $60 - 100\mathrm{fF}\mu\mathrm{m}^{-2}$ となっていて、用いられる物質や電流密度等に依存する。それゆえ、典型的な $1\mu\mathrm{m}^2$ の接合では、500GHz での抵抗値 $1/\omega C \sim 4\Omega$ は通常の RF 回路のインピーダンスレベル $\sim 50\Omega$ とはずいぶん異なる。その結果、接合のキャパシタンスとのギャップを埋めるためにチップ上のインダクタンス調整回路が必要となる。インダクタンス同調は並列接続か直列接続のいずれかが考えられ、2 つの SIS 接合の間に設置されるだろう（図 13)。通常、インダクタンス同調は薄膜状の超伝導マイクロストリップ線の一部分を占める。これらの全ての場合で、ミクサーの RF バンド幅 $\Delta\nu$ は基本的に SIS 接合部分の RC 積で Nb/酸

化 Al/Nb 接合だと $\Delta\nu \sim$100GHz 程度に制限されるし、AlN バリアを用いると $\Delta\nu \sim$300GHz 程度まで上昇する。この周波数幅の制限は分布回路技術を用いることで回避されるが、製造コストや設計の複雑化といった問題が出てくる。

ミリ波の SIS ミクサーが非常に高感度な理由の一つはインダクタンス同調での損失がほとんどないからだ。しかしながら、700GHz 以上となると、最も広く用いられている超伝導体（ニオブ）製の同調コイルに損失が出てくる。光子がクーパー対を壊すのに十分なエネルギー（$h\nu > 2\Delta$）からであり、ミクサーの性能は急激に落ちる。この問題を軽減するためにいくつかのアプローチがとられてきた。それには通常の金属を用いるものや、より大きなギャップを持つ NbN、NbTiN といった超伝導体を用いるもの、そして非常に高い電流密度の AlN バリアをはるもの等が含まれる。現在では、SIS ミクサーは周波数でいうと 1.25THz 程度まではうまく作動している。Herschel/HIFI の 1.2-THz SIS ミクサーの最新の成果は、補正なしでは 550K(DSB)、LO ビームスプリッターの補正後では 400K 以下である。現在用いられている技術での上限周波数は 1.6THz 付近である。

### IV-E：Performance

図 14 はいくつかの受信機の雑音温度をプロットしたものである。400GHz 以下では、最も良い結果は量子限界のわずか数倍で、0.1K/GHz 程度まで落ちる。500GHz 以上では、半光学的受信機がウェーブガイドに匹敵するものとなる。

### IV-F：New Directions

今やミリ波領域の SIS 技術はかなり成熟した所まで到達しているので、特に ALMA のようなプロジェクト側からの要請から、もっと可能性があり操作しやすく、組み立てやすいものへと受信機の重点が移っている。開発目標には fixed-tuned operation を伴う RF バンド幅 [?]、広い IF バンド幅、2 偏光、balanced ミクサー [?]、サイドバンドの分離、そしてビームリードコンタクト [?] がある。ALMA メモシリーズはこの分野の特に有用な技術情報源だ。それには ALMA の開発に携わる多くの機関での最新の進展が載っている。Space Terahertz Technology conference も最新技術の多くを採用している。

## 本ゼミとはあんまり関係ないんですけど...

以前先生に頂いた観測方面での論文を読んでいて、または普段生活しててちょっと気になったことのまとめ。答えをだしたもの、まだ模索中のもの、詳しいことは後回しにしてざっと概要だけ調べたもの、混在しています。誤差の話はすごく長くなってしまいました。。。

## フォノンって？

簡単のため 1 次元で考える。ギターの弦を考えると色んな定在波が出る。腹が 1 個、2 個、... → モード。

N 個のイオンからなる 1 次元結晶を考える。連続体の弦ではないが、イオンが相互作用で繋がった弦だとみなせる。イオン数が非常に多いのでモード数もたくさんあるが、頑張れば個々のモードに分解で

きる。腹が 1 個、2 個、...。電子が波より粒子のほうが（普通）イメージしやすいのと同様に、この格子振動の強さも「粒子」で扱えると楽。これがフォノン（＝格子振動の量子化）。絶対零度だとフォノンは 0 個、温度が上がるとフォノン数は増える。電子との相互作用もフォノンとの衝突と考える。

## 遠方銀河の観測

- 遠方銀河は非常に暗い→大望遠鏡
- 空間分布を知るには広い領域を見る必要あり→大望遠鏡
- 観測する静止系波長が赤方偏移によって異なる→多波長観測

銀河スペクトルでは 4000A 付近の段差（4000A ブレーク）、912A の段差（ライマンブレーク）、1.6um でのでっぱりが特徴的。ライマン系列は $n \geq 2 \to 1$ の遷移。バルマー系列は $n \geq 3 \to 2$ の遷移。

### ライマンブレーク法

ライマンブレークにより、912×(1+z)A より短い波長の光はほとんど来ない。その段差を境に極端に明るさの変わる銀河を探すと、その銀河は目標赤方偏移のものである可能性が高い。

### ライマン$\alpha$輝線

Ly$\alpha$ は 1216A。星形成銀河はしばしば強い Ly$\alpha$ 輝線を持つ。赤方偏移した Ly$\alpha$ 輝線の波長の狭帯域フィルターと、それと同じ中心波長の広帯域フィルターを用いる。Ly$\alpha$ が入ると相対的に狭帯域フィルターの等級が明るくなる。利点としては

- 連続スペクトルの弱い（＝暗い）銀河でも、Ly$\alpha$ が出ていれば受かる
- 受かったやつは定義より Ly$\alpha$ が出ていることが確実なので分光しやすい

欠点は

- Ly$\alpha$ の出ている銀河しか探せない
- 一度に探せる赤方偏移の範囲が狭い
- 夜光のせいで特定の赤方偏移しか探せない（夜光の穴のような領域がある）

Ly$\alpha$ で光る銀河は星種族が若く重元素量も少ない→生まれて間もない銀河の可能性。

Q：星形成銀河ならライマン $\alpha$→ライマン $\alpha$ なら星形成銀河？？

### K 補正

たとえば赤方偏移 z の天体の B バンド（中心波長 4500A）の見かけ等級を測ったとする。このとき、観測波長は本来のものが (1+z) 倍されているので、銀河自身の静止系では波長は 4500/(1+z)A に相当する。この観測された B バンドのみかけ等級から、現在まで進化したこの銀河の B バンド絶対等級を推定する際に、K 補正が必要になる。(by 講義資料)

→多分：z=2 を考えると、B バンドで観測しているつもりになっているのは実は銀河さんからすると

4500/(1+2)=1500A の波長。でも知りたいのは 4500A の値。なのでこの 1500A から銀河のスペクトルモデルか何かを仮定して、4500A での値を推定するのでは？？（でもそれだと結構誤差というか嘘というかが出そう）

これで分かるのはこの光が銀河を出たとき。その瞬間から現在までに銀河のスペクトルは進化しているはず。それを補正するのが E 補正（Evolution 補正）？？

## 星形成活動

銀河進化のポイントは、DM による質量増加とガスから星への変化。星形成は遠方銀河の最も注目すべき特徴。どうやって定量化するか？

- 星形成率（SFR）：一年間に何 $M_{sun}$ のガスが星になるか。
- 初期質量関数（IMF）：生まれてくる星の質量分布関数。
  重い星ほど数が少ない。よって総質量は軽い星で決まる。しかし重い星ほど M/L が小さいので総光度は重い星で決まる。

SFR(t) と IMF を指定して初めてその銀河の星形成史が決まる→いつ、どんな質量の星が何個生まれるか。

ただ、生まれてくる星を直接数えることはできないので、現在の SFR は重い星からの光を IMF を仮定して星形成率に換算している。なのでどの IFM の下での値なのかに注意する。（※重い星は高々10% 程度のようだから、それから残り 90% を推定するのはちょっと無茶な気もする）

## ダストに隠された銀河＝サブミリ波銀河

ダスト＝星間空間に漂う微粒子。ダストが豊富な銀河のほとんどは星形成が活発。ダストは短波長の光ほどよく吸収するので、ダストがあると本来より赤くなる。吸収がとても強い銀河では可視や紫外では見えなくなる。紫外を吸収して赤外で放出、遠方の場合は赤方偏移でさらに波長が伸びる→サブミリ波銀河。

### Dense gas in normal and active galaxies ( Kohno+)

- PDR がよくわからない
- なぜ CO で見るのか（星形成とどう関連？）

### Spatial correlation between 〜（ Tamura+）

- emissivity index とは？
- Ly$\alpha$ と星形成の関係
- angular cross-correlation function？
  →たとえば 30 秒離れた面積 dA の領域に、銀河が同時に見つかる確率とか？

## 宇宙空間の銀河の分布

電波観測で銀河数を数える、ということがあるのかどうかは分からないが、例えば可視だと光度関数等の研究で必ず銀河数を数える作業が出てくる。というより銀河数を数えることが主目的の研究が存在する。このとき仮に m=-20 の銀河が 100 個見つかったとして、この 100 という数にはいったいどれくらいの誤差が見込まれるか？誤差の計算にはモデルが必要だが、銀河数というのはいったいどういった分布をしているのか？一般に天文業界ではこういう分布はポアソン分布として処理するようだが、それが本当に正しいのかを考えてみる。(昨年秋に天文台主催のすばる望遠鏡の観測体験企画に参加して、今そのデータ解析の最終段階＝誤差を考える段階にあり、いったい何をどう考えればエラーバーを付けることができるのか？ということをここ数週間考えていました。一応結論を出したので報告します。)

### 舞台設定

ある銀河群（HCG90 を観測）の光度関数を作ることを考えます。単に撮像しただけではグループ銀河にプラスしてフィールド銀河も写っているので、グループと同じ面積のフィールドデータをグループデータから引き算することを考えます（statistical subtraction)。これは可視の話なのですが、他の波長域にも通じる話だろうし、多分電波屋さんも他波長データを処理するときがあるのではないかと思うので書いてみます。

### 当面の目標

銀河の分布が、いくつかの仮定を認めるならポアソン分布になることを示したい。

### ポアソン分布

非常に稀な事象が、非常に多数の試行を行った際に出てくる分布。その確率分布関数は

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{17}$$

で表され、$Po(\lambda)$ と書く。二項分布において、期待値を一定にしたまま試行回数を無限大に（つまり確率を無限に小さく）することで得られるということがよく知られている。

### 二項分布から導けるか？

統計学の授業で習うように、ポアソン分布は二項分布の一つの極限として出てくるので、その路線でやってみる。宇宙のある領域（ここでは 1Mpc$^3$ とする）を持ってくる。これを微小空間に分割することを考える。仮に 1kpc$^3$ の微小空間に分割したとすると、合計 $10^9$ 個の微小空間が生成される。この微小空間中には銀河が入っても 1 個と考える。すると、$10^9$ 個ある各微小空間について、銀河が 0 か 1 かを数えていくことができる（要するにベルヌーイ試行)。

ここで「この 1Mpc$^3$ 中の銀河数の期待値は一定」と仮定する。たとえば 500 個。すると、銀河数 X

（確率変数）は

$$X \sim Bi(n,p) = Bi(10^9, 500 \times 10^{-9}) \tag{18}$$

に従うはず。ここで Bi は二項分布を表す。このまま極限をとればポアソン分布になるかと思うのだが、事態はそう単純ではない。たとえばここで考えた確率変数 X が、絶対等級-15 等の銀河数を表すとする。さらに、M=-16 の銀河数を Y とすると上の議論と同様にして Y も二項分布に従う。1Mpc$^3$ 中の M=-16 の銀河数の期待値が 300 とすると、

$$Y \sim Bi(10^9, 300 \times 10^{-9})P() \tag{19}$$

である。問題は、この X と Y はそれぞれ二項分布に従っていても、果たして X+Y も二項分布に従っているか？という点にある。等級だけでなくても、銀河数を色ごとに見たり、何か他の物理量で見たりと様々なカテゴライズができるはず。その個々のカテゴリーが二項分布に従っていても、全確率変数の和が二項分布に従っていないと「宇宙の中の銀河数」についての議論はできない。

しかし残念なことに確率変数 X と Y がそれぞれ二項分布に従うからといって、その和 X+Y も二項分布に従うとは限らない。簡単のためにサイコロを考える。サイコロを 100 回振るときに、X=1 の目の出た数、Y=2 の目の出た数、とすると X+Y は二項分布になる。しかし、X=1 か 2 の目が出た数、Y=偶数目の出た数、という場合は？ X=黒のサイコロで 1 か 2 の出た数、Y=白のサイコロで偶数の出た数、という場合は？と考えて行くと、すぐに三項分布 etc の多項分布が出てきて一般に二項分布にはならない。確率変数が独立かどうか、といったことがそれらを判別する条件になる。ここで銀河に話を戻すと、X:M=-15 の銀河数、Y:M=-16 の銀河数としたときに、一般に X+Y が二項分布に従うかどうかは分からない。

よって、銀河数が従う分布として二項分布を考えるのは弱いので、二項分布の極限としてポアソン分布を導くのは諦める。

### 仮定からポアソン分布を導く

そこでもっと別のアプローチでポアソン分布が導けないかを考える（ポアソン分布は本来二項分布とは独立な分布で、たまたま二項分布で極限とれば近似できますよというだけの話だったので、別アプローチでポアソン分布が出てきてもそれは前節の内容と矛盾しない）。

ここで、以下の 3 つを仮定する。

- 事象はランダムに発生
  考えている空間内では銀河はランダムに分布していると仮定する。今までの微小空間の考え方を用いると、i 番目の微小空間と j 番目の微小空間での事象は全く関係ないとする。
- 期待値が一定
  微小空間 $\Delta V$ 中の銀河数は $\lambda\Delta V$ と書けて、この $\lambda$ を期待値（単位体積あたりの銀河数）と呼ぶことにする。$\lambda$ は考えている空間内ならどこでも同じ値をとる。ポアソン分布のパラメータはこの $\lambda$ だけである。$\lambda\Delta V$ は微小空間 $\Delta V$ 中に銀河が 1 個存在する確率となる。
- 微小空間内の事象の発生回数が 2 回以上となる確率
  これはゼロというわけではないだろうが無視することにする。$\Delta V$ の大きさによって銀河が 2 個以上存在する確率は変化するだろうが、それは微小空間の大きさ $\Delta V$ に対して無視できる量とす

る。つまり $o(\Delta V)$ である。o は高位の無限小。

これを用いてポアソン分布を導く。まず微小空間 $\Delta V$ 内に銀河が N 個存在する確率を $P(N|\Delta V)$ と書くことにする。仮定より

$$P(1|\Delta V) = \lambda\Delta V + o(\Delta V) \tag{20}$$

$$P(n \geq 2, \Delta V) = o(\Delta V) \tag{21}$$

となる。まず体積 $V + \Delta V$ 中に銀河が 1 個もない場合を考えてみる。ここで $V$ は $\Delta V$ を m 個集めたもの、つまりサンプリング途中での累計体積である。ランダムさの仮定より

$$P(0|V+\Delta V) = P(0|V)\cdot P(0|\Delta V) = P(0|V)\cdot(1-\lambda\Delta V - o(\Delta V)) \tag{22}$$

ここで移項 + 両辺を $\Delta V$ で割ることをすると、

$$\frac{P(0|V+\Delta V)-P(0|V)}{\Delta V} = -\lambda P(0|V) - \frac{2o(\Delta V)\cdot P(0|V)}{\Delta V} \tag{23}$$

であるが、右辺第二項は o より無視できる。いま、$V \gg \Delta V$ と仮定すると（これは結局 $m \gg 1$ となり試行回数が十分多いことを意味する)、左辺はほとんど微分とみなせる（100 に対する 10 は無視できないけど、100 億に対する 10 は無視できるから)。よって、

$$P(0|V)' = -\lambda P(0|V) \rightarrow P(0|V) = e^{-\lambda V} \tag{24}$$

である。次に体積 $V + \Delta V$ 中に銀河が n 個ある場合を考える。これは (i)$V$ で n 個かつ $\Delta V$ で 0 個の場合、(ii)$V$ で n-1 個かつ $\Delta V$ で 1 個の場合、(iii)$V$ で n-k 個かつ $\Delta V$ で k 個の場合（ただし k は 2 以上）の 3 つの場合に分けられる。この 3 つはそれぞれ排反なので

$$\begin{aligned} P(n|V+\Delta V) &= P(n|V)P(0|\Delta V) + P(n-1|V)P(1|\Delta V) + P(n-k|V)P(k|\Delta V) \\ &= P(n|V)(1-\lambda\Delta V - 2o(\Delta V)) + P(n-1|V)(\lambda\Delta V + o(\Delta V)) + P(n-k|V)o(\Delta V) \end{aligned} \tag{25}$$

これも先ほどと同様に移行して $\Delta V$ で割れば微分方程式とみなせて

$$P(n|V)' = -\lambda P(n|V) + \lambda P(n-1|V) \tag{26}$$

である。両辺に $e^{\lambda V}$ を掛けるとすぐに変形できて

$$[e^{\lambda V}P(n|V)]' = \lambda e^{\lambda V}P(n-1|V) \tag{27}$$

たとえば n=0,1 のときはすぐにこれがポアソン分布の式と一致することが確かめられる。

以下、$P(n|V)$ がポアソン分布

$$\frac{e^{-\lambda V}(\lambda V)^n}{n!} \tag{28}$$

を満たすことを数学的帰納法で証明。n=0,1 では正しいことは上述の通り。n=k-1 で式 (28) が成り立つと仮定すると、

$$[e^{\lambda V}P(k|V)]' = \lambda e^{\lambda V}P(k-1|V) = \frac{\lambda^k V^{k-1}}{(k-1)!} \tag{29}$$

これを V で積分して結局

$$P(k|V) = \frac{e^{-\lambda V}V^k}{k!} \tag{30}$$

となり、n=k でも式 (28) が成り立つことが示せた。よって

$$P(n|V) = \frac{e^{-\lambda V} V^n}{n!} = Po(\lambda) \tag{31}$$

となる。つまり、上の仮定を満たすなら、銀河数はポアソン分布に従うことが直接示せた。

### この段階で分かること

何らかの物理量で分けられた銀河のカテゴリーはポアソン分布とみなせるということになった。ここでポアソン分布に従う 2 つの確率変数

$$X \sim Po(\lambda) \tag{32}$$

$$Y \sim Po(\mu) \tag{33}$$

があったときに、この確率変数の和 X+Y は何分布に従うかを考えると、確率変数の和の従う確率分布は畳み込みの計算をすれば出る（Jacobian でオッケー)。二項分布、ポアソン分布、正規分布に従う確率変数の和はまた同じ確率分布に従う。これを再生性という。ただ、二項分布は前述の通り、二項分布に見せかけて実は三項分布でしたということがよくあるので注意。しかし前節で示したように個々の銀河のカテゴリー（たとえば等級で分けたやつ）がポアソンに従うならその和もポアソンに従うことは厳密に正しい。

よって、この段階で言えるのが、これまでの仮定を満たすなら銀河群領域を撮像したときの銀河数 X と、フィールドを撮像したときの銀河数 Y はそれぞれポアソン分布に従う、ということである。これをふまえて新しく舞台設定をする。今グループとして領域 $\alpha$ を撮像したときの銀河数を表す確率変数を X とする。領域 $\alpha$ と同じ面積のフィールドである領域 $\beta$ を撮像したときの銀河数を表す確率変数を Y とする。すると

$$\begin{aligned} X &= F_x + G \\ Y &= F_y \end{aligned} \tag{34}$$

と書ける。ここで $F_x, F_y$ は領域 $\alpha, \beta$ でのフィールド銀河を表す変数で $G$ はグループ銀河を表す変数である。いまこれらは全てポアソン分布に従うとしているので、F には平均 $F_0$ とポアソンノイズ $\Delta F$ が、G にも平均 $G_0$ とポアソンノイズ $\Delta G$ がつく。よって

$$\begin{aligned} X &= F_0 + G_0 + \Delta F_x + \Delta G \\ Y &= F_0 + \Delta F_y \end{aligned} \tag{35}$$

なので

$$\begin{aligned} X &\sim Po(F_0 + G_0) \\ Y &\sim Po(F_0) \end{aligned} \tag{36}$$

となる。これ以降にする処理は、この 2 つの確率変数の差を考えて、それに付随する誤差を考える。その誤差の期待値がグラフに付けたいエラーバーである。

ポアソン分布に従う変数の和はポアソン分布に従うのであるが（和の再生性)、差はどうだろうか？これ、和のときと同様に畳み込みの計算をすれば出るのだが、ポアソンとは全然違う分布になる（変形ベッセル関数というものが出てきます)。よって、この手の研究（物理量の差を考えるもの）では単純にポアソンノイズを誤差とみなすと多分間違える（本当の誤差と大差ないだろうけど...)。

ではどうすればよいかを考えてみる。ポアソンは変数の差が弱点だったので、差も再生性を有する分布に話を変えてしまう。ここで、銀河の撮像、などというときはサンプルは十分にあると考えられるので、その場合はポアソン分布（というよりあらゆる分布が）正規分布で近似できる。ポアソンだと期待値が 10 程度あれば非常に精度よく正規分布に近似できるようである。正規分布は和と差、つまり線形変換に対して再生性を持つ（すばらしいですね、ガウス！）。

### その場合の誤差は？

まずグループ銀河の数は $Z = X - Y =$ で書ける。これは認める。これに付く誤差を考える。いったん各変数の従う分布をまとめると

$$\begin{aligned} F_x &\sim N(F_0, F_0) \\ F_y &\sim N(F_0, F_0) \\ \Delta F_x &\sim N(0, F_0) \\ \Delta F_y &\sim N(0, F_0) \\ G &\sim N(G_0, G_0) \\ \Delta G &\sim N(0, G_0) \end{aligned} \tag{37}$$

ここで $Z = X - Y = \Delta F_x - \Delta F_y + G = \Delta F_x - \Delta F_y + G_0 + \Delta G$ である。一般に正規分布に従う確率変数 $X, Y$ の線形結合 $aX + bY$ は $N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2{\sigma_1}^2 + b^2{\sigma_2}^2)$ となる。よって X-Y の従う分布は

$$Z = X - Y \sim N(G_0, 2F_0 + G_0) \tag{38}$$

であり、その誤差の従う分布は

$$\Delta Z \sim N(0, 2F_0 + G_0) \tag{39}$$

である。よって誤差の期待値（エラーバーの値）は

$$\sqrt{2F_0 + G_0} \tag{40}$$

となる。

### 最尤推定

式 (40) が誤差なのだが、その表式は真の分布（ポアソン）として仮定している $F_0, G_0$ によるものである。しかし観測するのは $X, Y$ なので両者を結びつけるのが最後の仕事である。ここで出てくるのが統計量の「推定」という考え方である。つまり、観測した値（標本平均、標本分散）から母平均、母分散を推定したいのである。今回は最尤法を用いた点推定を採用する（詳細は統計学の教科書を）。要するに、「今観測している量というのは実現確率が最も高い事象が発生したのだ」と仮定する。これが最尤原理である。母数が取りうる値の集合を母数空間という。母数空間での母数の色々な値における「もっともらしさ」を定式化した関数を尤度関数という。母集団分布が正規分布の $\mu, \sigma$ のように複数の母数を持つ場合、その尤度関数は

$$L(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \Pi_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \tag{41}$$

と書ける。$f$ は確率分布関数で、正規分布だと例の exp のやつ。これを調べたい母数 $\theta_i$ で偏微分し（乗積の場合は対数をとってから微分する)、それをゼロにする値を計算すると、最尤原理としてはその値が母数の推定として最ももっともらしい値となる。

がしかし、今の場合に限ると要するに

$$X = F_0 + G_0 \tag{42}$$

$$Y = F_0 \tag{43}$$

と見なせば良い。すると $2F_0 + G_0 = X + Y$ なので、結局観測量 $X, Y$ を用いて誤差は

$$\sigma = \sqrt{X + Y} \tag{44}$$

となる。