

Section 6.10 Gravitational Waves

津名 大地 (理学部天文学科4年)

平成 28 年 12 月 12 日

6.10.1 Introduction

菊地原くんから相談を受け、この節については津名が作成した。

Observational Cosmology の 6.10 に書かれていることは 2010 年当時のもので翻訳するだけ無駄 [1] なことから、これとは全く独立な構成で作成している。今急速に進化を続けている分野であるため、(2016/12 現在) 最先端の内容もなるべく含めるようにした。

6.10.2 Characteristics

重力波の物理的な性質として大事なものは以下の 5 つである。

- 真空中を光速で伝わる。
- 横波である。
- 2 つのモードがある。
- 最低次は四重極モーメントである。
- 基本的にはどんなモノでも通り抜ける。

このうち最初の 3 つを証明する具体的な数学は後ろの Appendix A に述べられているため、興味のある方はそちらを参照されたい。4 つ目は要するに質量単極子・双極子成分は存在しないということで、これらは質量・運動量保存から導かれる事実である。最後は光においてはダストのような邪魔なものがあるが、重力波については他のものに吸収・散乱されたりしないという強みがある。このことから光では見えない CMB 以前の超初期宇宙についても重力波で明らかにできるかもしれないと期待されている。

6.10.3 "We did it!"

一般相対論からの数学的な予言として誕生した重力波ではあったが、地球で観測される重力波は微弱で、並な観測機器では装置・地球由来の多くのノイズに埋もれてしまう。

ただし間接的な重力波の存在証明は、Hulse, Taylor が 1974 年に発見した連星パルサー PSR B1913+16 の観測によって成功している (1993 年ノーベル物理学賞受賞)。この連星パルサーは互いの距離が地球と月の数倍程度とかなり近く、ここで働く重力はニュートン力学とは大きくかけ離れたものになる。一般相対論は、連星パルサーは徐々にそのパルス周期を縮めていき ($\sim -2 \times 10^{-12}$ s/s)、重力ポテンシャルを重力波として解放することを予言している。このパルサーおよびいくつかの連星パルサーの観測から、その周期の変化が一般相対論の予言するものと 1% 以下の精度で一致することがわかっている ([2],[3])。

一方その波を直接検出するという試みは、上で述べたような微弱さから困難を極めた。しかし一般相対論が発表されてちょうど 100 周年の 2015 年 9 月 14 日、ブラックホール連星¹(BBH) 起源の重力波 GW150914 が

¹英語では Binary Black Hole(BBH). X 線屋が言うブラックホール連星は Black Hole Binary(BHB) で、混同しないように気をつける必要がある。一般的には、前者はブラックホール+ブラックホール、後者はブラックホール+恒星である。

LIGO Scientific Collaboration の aLIGO によって初めて検出された。この大発見については最初の論文 [4] に詳しく述べられている。

ここでは GW150914 について、具体的な物理量を見ていくことにしよう (データに関しては [5] から)。BBH から出る重力波について、重要な物理量は以下のように多岐にわたる。

- BBH の質量・スピン。これらは binary の基本的なパラメータであるが、各 BH のスピンについてはその波形への影響が弱く、あまり強い制限は得られていない。質量は $36.2^{+5.2}_{-3.8} M_{\odot}$, $29.1^{+3.7}_{-4.4} M_{\odot}$ と得られている。
- Chirp mass。これは二つの BH の質量を m_1, m_2 として $(m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$ で定義され、GW150914 では $28.1^{+1.8}_{-1.5} M_{\odot}$ であった。互いの周りを回っている inspiral phase の場合、発生する重力波の周波数変化はこの Chirp mass に依存する。Binary 起源の重力波は inspiral→merger の過程で軌道が縮まっていくため周波数が時間的に増大する。これが Chirp という名前の由来である。
- False Alarm Rate。これは観測的な側面のもので、噛み砕いて言えばノイズから同じ波形が生まれる確率を示している。 $6.0 \times 10^{-7}/\text{yr}$ がいわゆる 5.3σ に対応していて、GW150914 はこれ以上の強さだったため FAR は $< 6.0 \times 10^{-7}/\text{yr}$ と上限でしか得られていない。
- Sky Localization。これは検出された天体が全天の中でどの範囲内に位置しているかを、面積で表したものである。LIGO の Hanford, Livingston に 1 台ずつある計 2 台の干渉計によって、GW150914 の Sky Localization は 230deg^2 (90%) と計算されている。Sky Localization は天体の距離にも依存するが、それ以上に検出器の数に依存する。将来 (来年?) Virgo の 1 台の干渉計が十分な精度を達成し参加することになれば、Sky Localization は非常に小さくなることになる。これは EM follow-up と呼ばれる、GW が検出された天体を電磁波で特定することを目指す人たちにとってはとてもうれしい話である。今回の GW150914 では follow-up は、例えば可視光では上の面積の 1/3 程度しか達成できなかったが、この面積が縮まるとなれば、母銀河などの特定もやりやすくなると期待されている。EM follow-up の結果は [6] に述べられている。(計 25 チーム、1500 人以上の Author がいるものすごい論文となっている。)
- Luminosity Distance。これに関しても重力波の波形から独立に求めることができる。今回求められた値は $420^{+150}_{-180} \text{Mpc}$ と精確ではないが、aLIGO からさらに進化した、宇宙論的距離で発生する重力波を検出できる干渉計 (LISA など) ではより精確に計ることができる。精確に求められるようになれば、このような BBH は *standard siren* として使うことができると期待されている (Schutz(1986)[7])。上で述べたような母銀河の特定により redshift が正確に求めることができるようになったら、ハッブル定数などの宇宙パラメータを精密に計算する一つの方法になると考えられる。

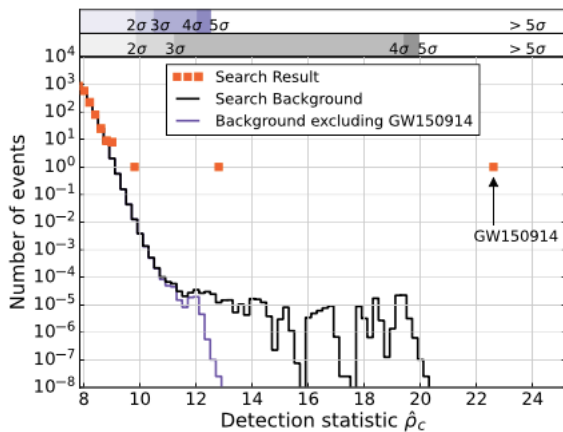


図 1: PyCBC というアルゴリズムによる解析結果 [5]

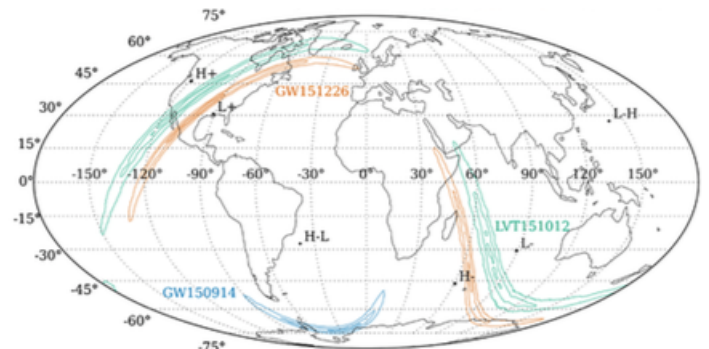


図 2: 重力波源の sky localization の確率分布 [5]

6.10.4 Observational Targets and Future Prospects

今のところ観測に成功しているのは BBH のみであるが、他にも重力波源として観測が可能であると考えられているものがいくつか存在する。これらの解析方法について私の知る範囲で共通していることは、どれについてもモデルを設定し、数値相対論の計算で得られた波形をテンプレートとしてたくさん用意し、検出器で観測された波形とある SNR 以上で一致するテンプレートがあるかどうかを解析する手法が用いられている (matched filter algorithm と呼ばれる。このアルゴリズムについては例えば [8] に詳しい。)。重力波源として期待されているもののうち、いくつか代表的なものを紹介すると

- NS-NS/BH-NS Merger

質量関数によって示唆される通り中性子星の方がブラックホールよりも数多く存在するため、もともとは NS-NS の連星由来の重力波の方が先に検出されるのではないかと考えられていた。しかし未だに NS が絡んだ重力波源は検出されていない。

これらの合体の場合、脱毛定理の成り立つ BBH のときと違ってモノがあるためパラメータが増えたり MHD を考慮に入れないとなくなったりと、BBH 以上に数値相対論でのシミュレーションが大変な対象である。一方中性子星の状態方程式などわかっていないことも多く、NS が絡む merger が観測されればこれらを制限できることが可能になる。aLIGO ではこれからの 2nd, 3rd Observation run で数個程度の NS-NS merger が発見されるのではないかと考えられている。

- Cosmic Strings

初期宇宙では、宇宙は因果関係の絶たれたいくつかの時空域に分かれる。U(1) 対称性の破れる相転移が起こる際に、これらの領域が個別に相転移するため、宇宙ひもという位相欠陥の一種が発生すると考えられている²。素粒子の標準模型の先の話であるため存在すらアヤシイものであるが、仮に二つの宇宙ひもが衝突した場合、ある確率でループができると考えられていて、これが振動することで重力波源となる。宇宙ひもが出す重力波について、モデル設定、LIGO のデータによる検証の双方に渡って精力的に研究が行われている。

なお宇宙ひもについては重力レンズ関連で少し面白い話があるのだが、これに関して詳しく話すと宇宙ひものゼミになってしまうので割愛する (概要は wikipedia の英語記事を参照)。

- Primordial Gravitational Waves

インフレーション理論の多くのモデルは宇宙超初期の量子的なゆらぎが拡大されるとしていて、ゆらぎのテンソル成分については重力波として伝播していく。この原始重力波は CMB のパターンに B モード偏光という痕跡のようなものを残すため、CMB の偏光パターンの解析からこれを間接的に捉える試みが行われている (BICEP, POLARBEAR など) が未だ成功してはいない。一方重力波天文学が幕開けしたこともあり、原始重力波を直接重力波干渉計で捉えるという試みも不可能ではない。原始重力波の波長はかなり短く、LIGO や KAGRA の場合振動数が違いすぎるため無理なのだが、将来宇宙空間に打ち上げられることが提案されている DECIGO (Deci-Hertz Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) や BBO (Big Bang Observer) など「第 3 世代」と呼ばれる望遠鏡たちによる検出が期待される。

最後に、電波天文学に関連する話題を少しだけ述べる。NS-NS merger が起きたことが重力波検出器でわかった場合に、電磁波でどのように追確認できるかは多くの提案がある。その一つとして電波の signature について提案した Nakar, Piran (2011) [9] を簡単に説明する。

数値シミュレーションによれば、中性子星が合体する時に垂相対論的 (もしくは相対論的) な強いアウトフローが発生し、このアウトフローは最終的に周りの物質と相互作用し、電波の signal として長く残る。この論文の計算によれば、このようなシグナルは 1.4 GHz 程度で一番捉えやすく、aLIGO が重力波を捉えられる最遠 ($\sim$ a few 100 Mpc) の merger の場合数 $100 \mu\text{Jy}$ の強さで数週間ほど続くと考えられている。[6] では (BH-BH merger だったことから当然だが) このような電波の対応現象は見つからなかったが、今後 NS-NS merger が aLIGO などで検出されれば、電波望遠鏡が対応天体や母銀河を特定できる日が来るのかもしれない。

²物性物理学では液体が結晶化するときこのような位相欠陥が実際に生じる。そのためこの現象と関連付けられることが多い。

Appendix

A Equations for Gravitational Waves

重力波はどう伝播するのか、というところを一般相対論を用いて考察していく³。とはいっても、電磁波と対比して考えれば内容を表面的に掴むのはそれほど難しくはないように思う。

電磁波がマクスウェル方程式の解であるように、重力波は ($c = G = 1$ とした) アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

の一次の摂動解として表される。波といってるのだからきっと重力場でもアインシュタイン方程式から波動方程式がどうにかして導けるのであろう。最も簡単かつ実用的な例として、外場が弱いと仮定しアインシュタイン方程式を一次の摂動で表し、波動方程式を導出する。

このためにはまず metric を Minkowski と微小摂動に分ける。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad \eta \ll 1$$

このとき (1) 式は、少々面倒なテンソル計算の結果

$$\frac{\epsilon}{2} \left(-\square \psi_{\mu\nu} + \partial_\alpha \partial_\mu \psi_\nu^\alpha + \partial_\alpha \partial_\nu \psi_\mu^\alpha - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \psi^{\alpha\beta} \right) = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2)$$

となる。ただしオーダーを揃えるために $T_{\mu\nu}$ も一次の微少量であると仮定している。また

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}, \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu$$

この $\square$ は電磁気学でのダランベルシアンに対応するものである。

ただし (2) 式では波動方程式とは程遠い形である。こんな時に電磁気学では何をやったかという、ゲージをローレンツゲージに固定して、余計な項を一気に消したのであった。重力波でも似たようなことをして項を消せばよい。この式でゲージを固定する。

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi_{\beta\mu} = 0$$

これも縮約を展開すればローレンツゲージに似た形であることがわかる。これが (2) 式の 2 項目以降を消し去るのは、

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi_{\beta\mu} = \partial_\alpha \psi_\mu^\alpha - \partial_\alpha (\epsilon h^{\alpha\beta} \psi_{\beta\mu}) = 0 \Rightarrow \partial_\alpha \psi_\mu^\alpha = O(\epsilon)$$

であることから 2 項目以降がみな ϵ^2 のオーダーになるためである。結局

$$\square \psi_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\epsilon} T_{\mu\nu} \quad (3)$$

となり、波動方程式みたいなものが得られる。

ここで右辺をゼロにした時の解を考えることにする。これは重力波が真空中を伝播するときの解であり、ここから 重力波が真空中を光速で伝播する ことがわかる。真空中の波動方程式と同一であるため容易には解けそうであるが、テンソル方程式であることから、このまま解を出しても 16 個もの成分が振動するよくわからない解になってしまう。ここで事態を簡単にするトリックが自由度の話であるのだが、これから述べる自由度の話自体は何回読んでも簡単には思えない。

$\psi_{\mu\nu}$ というのは、 $4 \times 4 = 16$ 個の成分からなっている。しかし独立な成分は何個か？というのを考えるとその数は一気に減る。

³ この節およびその次の節は柴田大の教科書 [10]、ランダウ・リフシッツの教科書 [11] を参考にした。ほかにもシュツツの一般相対論 [12]、ハートルの教科書 [13] などが詳しい。

まず metric は by definition で対称テンソルである。このことから 16 個というのは対称性により 10 個に削減される。また、前のページでゲージとして 4 本の方程式を仮定したのだから自由度も 4 つ殺され、独立成分は 6 個になる。

ここで止めたくなるのだが、さらに自由度は減る。そもそも電磁気学でローレンツゲージを仮定したときも、ゲージ変換

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \chi \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}$$

をしてもローレンツ条件が保存されるように、 χ が

$$\square \chi = 0$$

を満たすことを条件として課していた。ここでも自由度を一つ消す必要があったのである。これを重力波の場合に置き換えると、ゲージ変換は

$$(x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon \xi^\mu) \Rightarrow (h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$$

になり、追加で課される条件は

$$\square \xi^\mu = 0$$

となるため、自由度はさらに 4 つ減る。したがって自由度は結局 2 つしかなくなる。後はゲージをうまく定めることで、 $\psi_{\mu\nu}$ の成分を自由度 2 を残して大幅に消すことができるようになる。この 2 つの自由度を便宜的に + (プラス) モードと × (クロス) モードと定義する。

ここで z 軸正の方向に伝播する平面波を考えると、 $\psi_{\mu\nu}$ の式は最終的に以下のようにできる (これは電磁波と対応して TT ゲージと呼ばれる)。

$$\psi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t_{\text{ret}}) & h_\times(t_{\text{ret}}) & 0 \\ 0 & h_\times(t_{\text{ret}}) & -h_+(t_{\text{ret}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ただし $t_{\text{ret}} = t - z$ である。この式から、重力波には xy 平面で見たときに縦横に振動する成分と斜め 45 度で振動する成分があることがわかる。これがプラスとクロスと呼ばれる理由である (図 3)。

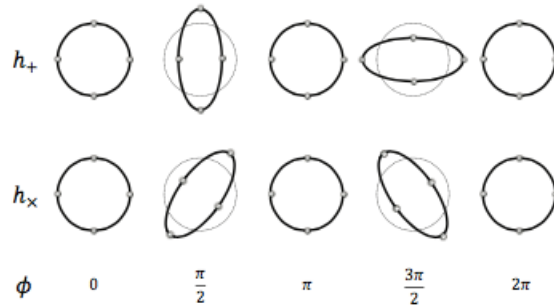


図 3: h_+ , $h_\times$ の視覚的説明 ([8] より)

(4) 式から $h_{\mu\nu}$ を求めなければならないが、実は話は簡単で $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ となる。これは (4) 式で $\eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = 0$ であることから、 $\psi_{\mu\nu}$ の定義式より

$$\eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - 2\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0$$

となるので

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = h_{\mu\nu}$$

より示される。なお (4) 式から $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ になることがわかる。重力波が横波である ことの説明になる。Binary などの場合に GW がどのように発生するか、というところは残念ながら書く時間がなかった。詳細は Shibata の教科書 [10] の 1.2.3 節などでわかりやすく計算されているので、そちらを参照されたい。

参考文献

- [1] S. Kikuchi, private communication
- [2] Weisberg J. M., Nice D. J., Taylor J. H. (2010), The Astrophys. J., 722, 1030
- [3] Kramer M. et al. (2006), Science, 314, 97
- [4] B.P. Abbott et al. (2016), Phys. Rev. Lett., **116**, 061102
- [5] B. P. Abbott et al. (2016), Phys. Rev. X **6**, 041015
- [6] B. P. Abbott et al. (2016) Astrophys. J. Lett., 826, L13
- [7] Schutz B F (1986) Nature **323** 310311
- [8] Antelis J.M., Moreno C. (2016) arXiv: 1610.03567v1
- [9] Nakar, E., & Piran, T. (2011), Nature, **478**, 82
- [10] M. Shibata (2016), *Numerical Relativity*, World Scientific
- [11] Landau, Lifshitz (1973), *Classical Theory of Fields*
- [12] Schutz B. F. (2009), *A First Course in General Relativity*
- [13] J.B.Hartle (2002), 牧野伸義訳 (2016), *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*