

〈補足 D : Schwarzschild 解とブラックホール〉

D.1 Schwarzschild 解の導出

宇宙定数のない Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

を、時空が真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) かつ球対称である場合に限って解く。ただし $g_{\mu\nu}$ を計量テンソルとして、

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad \text{Christoffel 記号,} \quad (\text{D.1})$$

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} \quad \text{Riemann テンソル,} \quad (\text{D.2})$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad \text{Ricci テンソル,} \quad (\text{D.3})$$

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{Ricci スカラー} \quad (\text{D.4})$$

とそれぞれ定義する。また $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルであり、 $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ および物質場の Lagrangian $\mathcal{L}_m$ に対して

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu,\alpha}} - \frac{\partial(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \right)$$

と関係する*1。

まず球対称を仮定すると、線素は簡単に

$$ds^2 = -Adt^2 + Bdr^2 + Cr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (A, B, C \text{ は } r \text{ のみの関数}^{*2})$$

と書ける。いまは球対称だけを仮定しているの、 A, B, C は r のどんな関数で置き換えても構わない。そこで、上式を

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\nu, \lambda \text{ は } r \text{ のみの関数}) \quad (\text{D.5})$$

と書いてみる。この式から得られる Lagrangian の作用

$$S \equiv \int \mathcal{L} d\tau = \int \left[e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \right] d\tau \quad \left(\cdot \equiv \frac{d}{d\tau} \right) \quad (\text{D.6})$$

に対して変分法を適用して $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ たちを読み取り、Einstein 方程式の $G_{\mu\nu}$ を計算してやろう、というのが方針である。

実際に式 (D.6) の $\mathcal{L}$ に対して Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \quad (\text{D.7})$$

を立て、測地線の方程式

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (\text{D.8})$$

と比較する。例えば $\alpha = t$ のとき、前者は

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{d\tau} (2e^{\nu}\dot{t}) - 0 = 2e^{\nu}(\dot{\nu}\dot{t} + \ddot{t}) = 0, \quad \therefore \ddot{t} + \frac{\nu'}{2}\dot{t}\dot{r} + \frac{\nu'}{2}\dot{r}\dot{t} = 0 \quad \left(' \equiv \frac{d}{dr} \right); \quad (\text{D.8}')$$

後者は

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma^t_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \ddot{t} + \Gamma^t_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \ddot{t} + (\Gamma^t_{tt}\dot{t}\dot{t} + \dots + \Gamma^t_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}\dot{\varphi}) = 0 \quad (\text{D.9}')$$

*1 $\mathcal{L}_m$ は、例えば電磁場では

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{em} \equiv -\frac{1}{16\pi} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu})$$

($A^{\mu} \equiv (\varphi/c, \mathbf{A})$ は電磁ポテンシャル) で与えられる。

*2 これらを r と t 両方の関数としても、最終的な結果は変わらない (Birkoff の定理)。

なので、式 (D.8') と (D.9') を比較することにより

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{\nu'}{2} \quad (\text{他の } \Gamma^t_{\mu\nu} \text{ たちは } 0)$$

を得る。あとは同じ作業を $\alpha = r, \theta, \varphi$ についても行えばよい。すると 0 以外の $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{\nu'}{2}; \\ \Gamma^r_{tt} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}; \\ \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot \theta \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$

を得る*3。すると式 (D.3) および (D.4) より得られる

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha}$$

に式 (D.10) の結果を代入して、 $R_{\mu\nu}$ たちが求められる。例えば $\mu = \nu = t$ のとき

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{tt,\alpha} &= \Gamma^r_{tt,r} = \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right)_{,r} = \frac{1}{2} (\nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda') e^{\nu-\lambda}, \\ -\Gamma^\alpha_{t\alpha,t} &= 0 \\ \Gamma^\alpha_{tt} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} &= \Gamma^r_{tt} \Gamma^\beta_{r\beta} = \Gamma^r_{tt} (\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) = \frac{\nu'}{2} \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) e^{\nu-\lambda} \\ +) \quad -\Gamma^\alpha_{t\beta} \Gamma^\beta_{t\alpha} &= -\Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tt} \Gamma^t_{tr} = -2 \cdot \frac{\nu'}{2} \cdot \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} = -\frac{\nu'^2}{2} e^{\nu-\lambda} \\ \hline R_{tt} &= \frac{1}{2} \left(\nu'' - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} \end{aligned}$$

である。同じ作業を他の (μ, ν) たちについても行くと、0 以外の $R_{\mu\nu}$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{tt} = \frac{1}{2} \left(\nu'' - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda}, \\ R_{rr} = \frac{1}{2} \left(-\nu'' + \frac{\nu' \lambda'}{2} - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{2\lambda'}{r} \right), \\ R_{\theta\theta} = \left(-1 - \frac{r\nu'}{2} + \frac{r\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} + 1, \\ R_{\varphi\varphi} = \left[\left(-1 - \frac{r\nu'}{2} + \frac{r\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} + 1 \right] \sin^2 \theta \end{array} \right. \quad (\text{D.10})$$

を得る。ここで $R_{\mu\nu} = 0$ であれば式 (D.1) はみたされるので $R_{\mu\nu} = 0$ とすると*4、 $R_{tt} = R_{rr} = 0$ より

$$\nu' + \lambda' = 0, \quad \therefore \nu + \lambda = \text{const.}$$

を得る。 $r \rightarrow +\infty$ では $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu} \equiv (-1, +1, +1, +1)$ は Minkowski 計量), すなわち $\nu, \lambda \rightarrow 0$ となるはずなので、上式は $\nu + \lambda = 0$ となる。これを $R_{\theta\theta}$ の式に代入して整理すると、

$$(1 + r\nu') e^\nu = (re^\nu)' = 1, \quad \therefore e^\nu = 1 + \frac{C}{r} \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (\text{D.11})$$

と解ける。

ここで C を決定するために、古典極限を考える。測地線の方程式 (D.9) の空間成分を書き下すと

$$\dot{u}^i + \Gamma^i_{tt} \dot{t}^2 + 2\Gamma^i_{tj} \dot{t} \dot{u}^j + \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad (u^i \equiv \dot{x}^i; (i, j, k) = r, \theta, \varphi) \quad (\text{D.12})$$

*3 別解として、式 (D.6) から $g_{\mu\nu}$ たちを読み取り、定義 (D.2) に従って $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ たちを計算してもよい。

*4 式 (D.11) を式 (D.5) に代入して R を計算し $\rightarrow$ 式 (D.1) の左辺 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ を計算し $\rightarrow G_{\mu\nu} = 0$ とするのが正統的である。

であるが、古典極限として $u^i \simeq 0$ かつ $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) を導入すると

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \simeq \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}),$$

$$d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu = -[(-1 + \delta_{ij}u^i u^j) + (h_{tt} + 2h_{ti}u^i + h_{ij}u^i u^j)]dt^2 \simeq dt^2$$

なので、式 (D.13) は計量の時間変化がない ($h_{\mu\nu,t} \simeq 0$) とした上で

$$\dot{u}^i + \frac{1}{2}\eta^{ij}(\cancel{h_{jt,t}} + \cancel{h_{jt,t}} - h_{tt,j}) \simeq 0, \quad \therefore \frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{h_{tt}}{2} \right)$$

と近似できる^{*5}。したがって、これが Newton の運動方程式: $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla(-M/r)$ を再現するためには

$$h_{tt} = \frac{2M}{r}, \quad \therefore g_{tt} = -1 + \frac{2M}{r}$$

であればよい。この結果を元に式 (D.12) に戻れば、

$$e^\nu = -g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad \therefore e^\lambda = e^{-\nu} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

となる。最後にこれらを式 (D.6) に戻すことで、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_S/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{Schwarzschild 解}$$

を得る。ここに r_S は SI で

$$r_S \equiv \frac{2GM}{c^2} \simeq 3.0 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \quad \left(G \text{ は万有引力定数, } c \text{ は光速, } M_\odot \text{ は太陽質量} \right)$$

であり、**Schwarzschild** 半径と呼ばれる。

D.2 Schwarzschild 解の性質

D.2.1 $r \gg r_S$ のとき

$r \rightarrow +\infty$ のとき、Schwarzschild 解は

$$ds^2 \rightarrow -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

となって（球座標における）Minkowski 時空に収束する。すなわち $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ であるが、これは D.1 節の途中で古典極限を仮定したことからの帰結である。

D.2.2 $r < r_S$ のとき

Schwarzschild 解で $r < r_S$ のとき、

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) < 0, \quad g_{rr} = \frac{1}{1 - r_S/r} < 0$$

となるので、 t が時刻の役割を果たさなくなる。

D.2.3 $r = r_S$ のとき

Schwarzschild 解で $r \rightarrow r_S$ のとき、 $g_{tt} \rightarrow 0$, $g_{rr} \rightarrow +\infty$ となるので、 $r = r_S$ は特異点に思える。しかし

$$\frac{d\chi}{\chi} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_S r}}$$

なる χ を用いて Schwarzschild 解を書き換えてみると、

^{*5} ここで仮定した $u^i \simeq 0$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, $h_{\mu\nu,t} \simeq 0$ は、それぞれ「速度が非相対論的である」「重力場が弱い」「しかもその重力場が時間変化しない」ことを意味している。

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - r_S/4\chi}{1 + r_S/4\chi} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_S}{4\chi} \right)^4 [d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (D.13)$$

となる（計算過程は省略）。これは 3 次元 Euclid 時空と定数倍を除いて一致しているために、**等方座標**と呼ばれる。Schwarzschild 時空における $r = r_S$ はこの等方座標における $\chi = r_S/4$ に相当するが、これを式 (D.13) に代入しても計量は発散せず、特異点にならない。また $g_{tt} \leq 0$ かつ $g_{rr} > 0$ も成り立つので、D.2.2 節の問題も発生しない。したがって、 $r = r_S$ はあくまでも Schwarzschild 解の表式における 見かけ上の 特異点ということになる。

D.3 事象の地平線

$r = r_S$ は見かけ上の特異点とは言え、やはり特別な役割をもつ。それを探るために、外部 ($r > r_S$) から $r = r_S$ に向かって真っすぐに進んでくる光 ($d\theta = d\varphi = 0$) を考えてみる。この場合

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_S/r}, \quad \therefore \frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \quad (D.14)$$

なので、光が $r = r_{out}$ から $r = r_{in}$ ($r_S < r_{in} < r_{out}$) に辿り着くまでの時間は

$$\Delta t = - \int_{r_{out}}^{r_{in}} \frac{dr}{1 - r_S/r} = \left[r + r_S \ln(r - r_S) \right]_{r_{in}}^{r_{out}} = r_{out} - r_{in} + r_S \ln \left(\frac{r_{out} - r_S}{r_{in} - r_S} \right) \quad (D.15)$$

と求められる。すると

$$\text{光が } r = r_{out} \text{ から } r = r_S \text{ に到達する（およびその逆の）時間は無限大：} \Delta t(r_{in} \searrow r_S) = +\infty$$

であること、また同様の計算により

$$\text{光が } r = r_{in} (< r_S) \text{ から } r = r_S \text{ に到達する（およびその逆の）時間は無限大：} \Delta t(r_{in} \nearrow r_S) = +\infty$$

であることが分かる。したがって $r = r_S$ よりも外側からやってきた光は内側に入ることはできないし、 $r = r_S$ の内側を発した光は外側に脱出できない。すなわち $r = r_S$ は計量が発散するという意味での物理的な特異点ではないが、 $r = r_S$ の外側（内側）にいる観測者にとって観測可能な領域の端を表している。そこで $r = r_S$ を**事象の地平線**と呼び、その内側を**(Schwarzschild) ブラックホール**と呼ぶ。

ただし、以下の点には注意せねばならない：

- Schwarzschild 解は原点 ($r = 0$) の 1 点のみに質量 M が集まった場合の解なので、ブラックホールが $r \leq r_S$ の全体に詰まっている訳ではない。また太陽のように r_S を超える半径をもつ星に対しては、そもそも Schwarzschild 解は適用できない。しかし中性子星のように r_S よりも小さな半径をもつ星の場合、その半径よりも外側では星を質点と見なして Schwarzschild 解を適用することが許される。
- 式 (D.14) を

$$d\tau^2 = -ds^2 = g_{tt}dt^2 - g_{rr}dr^2, \quad \therefore \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{-g_{tt}}$$

より

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = g_{tt} \cdot \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} = -\sqrt{-g_{tt}} = - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1/2}$$

と書き換えて積分すると、式 (D.15) に対応する固有時間として

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= - \int_{r_{out}}^{r_{in}} \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1/2} dr = \left[\sqrt{r(r - r_S)} + r_S \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r - r_S}) \right]_{r_{in}}^{r_{out}} \\ &= \sqrt{r_{out}(r_{out} - r_S)} - \sqrt{r_{in}(r_{in} - r_S)} + r_S \ln \left(\frac{\sqrt{r_{out}} + \sqrt{r_{out} - r_S}}{\sqrt{r_{in}} + \sqrt{r_{in} - r_S}} \right) \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $r_{in} \searrow r_S$ としても

$$\Delta\tau(r_{in} \searrow r_S) = \sqrt{r_{out}(r_{out} - r_S)} + r_S \ln \left(\sqrt{\frac{r_{out}}{r_S}} + \sqrt{\frac{r_{out}}{r_S} - 1} \right) < +\infty$$

となって発散しない。すなわち光は有限の 時間 内に $r = r_S$ に到達することはできないが、有限の 固有時間 内には $r = r_S$ に到達できることになる。つまり、

- 外部にいる観測者から見ると光の時計はどんどん遅れていくので、光は有限の時間内に地平線に到達できない
- 光とともに走る観測者から見ると自身の時計は遅れないので、観測者は有限の固有時間で地平線に到達できる

という訳である。観測者がいったん地平線の内側に入ると、外部との連絡手段は失われる。

- 光が $r = r_S$ に到達するのに（外部から見て）無限の時間がかかると言っても、実質的には有限と見なしても構わない。なぜならば、例えば光が $r_{\text{out}} = 1 R_\odot$ ($R_\odot$ は太陽半径) から $M = 1 M_\odot$ のブラックホールの地平線のすぐ外側 ($r_{\text{in}} = 3 \text{ km} + 1 \text{ \AA}$) に到達する時間を計算してみると、式 (D.15) より

$$\Delta t = \frac{1 R_\odot - (3 \text{ km} + 1 \text{ \AA})}{c} + \frac{3 \text{ km}}{c} \times \ln \left[\frac{1 R_\odot - (3 \text{ km} + 1 \text{ \AA})}{1 \text{ \AA}} \right] \simeq 2.3 \text{ s}$$

にしかならないためである。

- 地平線 $r = r_S$ を発した光にとっても、外部 ($r = r_{\text{rec}}$) にいる観測者に到達するには無限大の時間がかかる。よしんばこれを「到達」と呼べたとしても、そのときに光の波長は

$$\frac{\lambda_{\text{rec}}}{\lambda_{\text{em}}} = \sqrt{\frac{1 - r_S/r_{\text{rec}}}{1 - r_S/r_{\text{em}}}} \xrightarrow{r_{\text{em}} \searrow r_S} +\infty \text{ 倍}$$

だけ重力赤方偏移^{*6}しており、観測者の目には何も映らない。

また以上の議論はすべて等方座標においても同様に成立し、座標の取り方によらない。

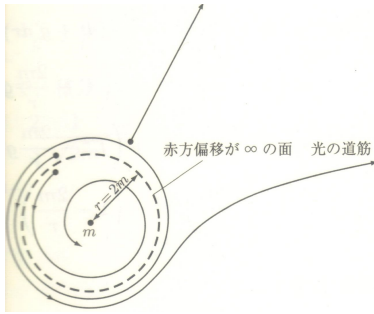


図 D.1 $r = r_S$ の内外における光の軌跡。文献 [1] より。

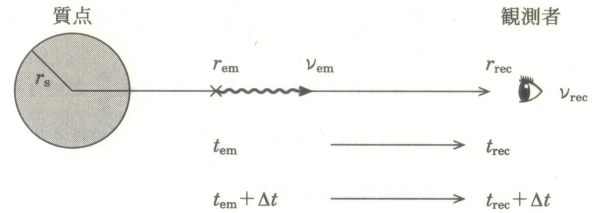


図 D.2 各変数の定義。文献 [2] より。

D.4 参考文献

- [1] P. A. M. Dirac 著, 江沢洋訳 1977, 『一般相対性理論』, ちくま学芸文庫
- [2] 須藤靖 2005, 『一般相対論入門』, 日本評論社
- [3] 「一般相対論」講義ノート

^{*6} 上図 D.2 のように各変数をとる。光に含まれる波の個数は $r = r_{\text{em}}$ と $r = r_{\text{rec}}$ で変わらない: $\nu_{\text{em}} \Delta \tau_{\text{em}} = \nu_{\text{rec}} \Delta \tau_{\text{rec}}$ ので、これを $\Delta \tau_i = \sqrt{-g_{tt}(r = r_i)} \Delta t$ ($i = \text{em, rec}$) を用いて書き換えて

$$\frac{\nu_{\text{rec}}}{\nu_{\text{em}}} = \frac{\Delta \tau_{\text{em}}}{\Delta \tau_{\text{rec}}} = \sqrt{\frac{-g_{tt}(r = r_{\text{em}})}{-g_{tt}(r = r_{\text{rec}})}} = \sqrt{\frac{1 - r_S/r_{\text{em}}}{1 - r_S/r_{\text{rec}}}}, \quad \therefore \frac{\lambda_{\text{rec}}}{\lambda_{\text{em}}} = \sqrt{\frac{1 - r_S/r_{\text{rec}}}{1 - r_S/r_{\text{em}}}} > 1$$

を得る。これは重力赤方偏移と呼ばれ、これが実際に観測された事実は一般相対論が正しいことを示す証拠の一つになった。