第 15 回　2016/9/23（金）　最終改訂　2016/12/1（木）

〈前回の復習〉

・**超大質量ブラックホール (SMBH)**……$M > 10^6\ M_\odot$ のブラックホール。

- アンドロメダ銀河：バルジの回転速度から、$M = (3.0 \pm 1.5) \times 10^7\ M_\odot$。
- M87 銀河：HST の観測により、$r \leq 2.5$ pc に $M = (3.2 \pm 0.9) \times 10^9\ M_\odot$。
- M106 銀河：**メーザー**を **VLBA** で観測すると、$r \leq 0.13$ pc に $M = (3.82 \pm 0.01) \times 10^7\ M_\odot$。
- 銀河系中心 **Sgr A***：恒星 S2 の軌道から、$M = (4.5 \pm 0.4) \times 10^6\ M_\odot$。
- MGC-6-30-15 銀河：鉄の **Kα 線**の輝線幅から、$\sigma \sim 10^5$ km s^{-1}, $r \sim (3\text{–}10)\ r_\mathrm{S}$。

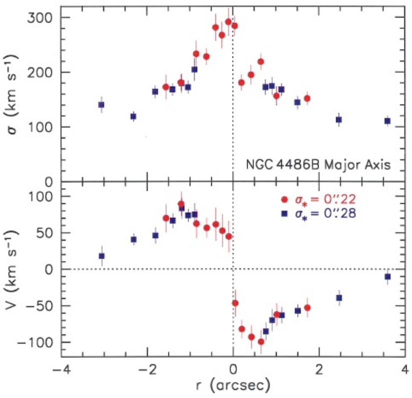


図 6.5　アンドロメダ銀河のバルジの速度分散（上）と平均速度（下）。横軸は中心からの角距離。

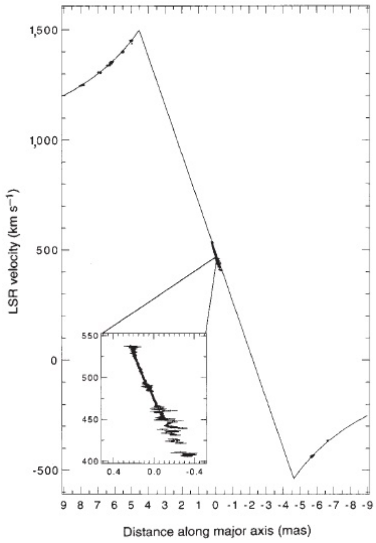


図 6.6　M106 銀河の中心の SMBH を周回するメーザーの視線速度。横軸は軌道中心からの距離。

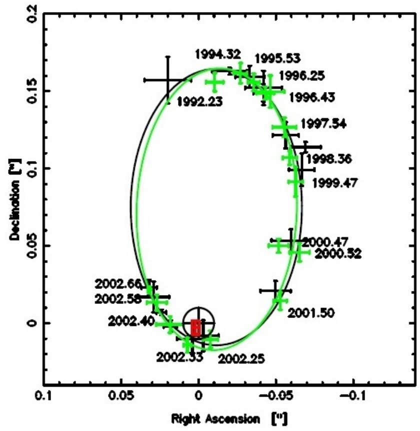


図 6.7　恒星 S2 の軌道。

・**メーザー**……誘導放射によるマイクロ波増幅。エネルギーの 2 準位系において、密度の低い場所では放射・吸収が卓越して $n_2 > n_1$ となることがある。この状態で上の準位にあった粒子が 1 つ下の準位に落ちると、それが連鎖的な誘導放射を引き起こし、全体として強力な放射となる。

・**反響マッピング**……SMBH の**変光**の時間スケールは SMBH の大きさの指標。しかし変光周期は相対論的効果により例外的に短くなることがあり、変光のうちクェーサーの大きさを反映しているもののみを抽出する必要がある。真の変光の Δt からは輝線領域の内部構造や中心のブラックホールの質量が求められる。

・**Magorrian 関係**……ブラックホールとその**ホスト銀河**は互いに強く相関している（図 6.10）。

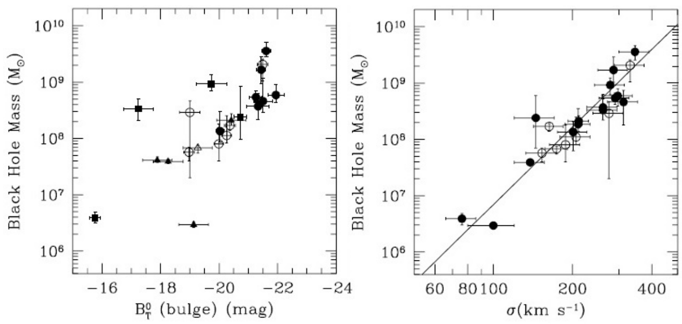


図 6.10　ブラックホールとホスト銀河の関係。縦軸はブラックホールの質量、横軸はホスト銀河のバルジの B 等級（左）と速度分散（右）。●：楕円銀河, ▲：渦巻銀河, ■：S0 銀河 + コンパクト銀河。

天体は自身から離れた所を通る光に作用し、その光路を曲げることはあるのだろうか？
そしてその力は、天体に近いほど強いのだろうか？

Isaac Newton（旧イングランドの物理学者・数学者・哲学者）

7　重力レンズ効果

いくつかの美しい銀河の写真は**重力レンズ効果**を利用して撮影されている。ここに重力レンズ効果とは、光が天体の近くを通るとその重力によって軌道が曲げられ、その結果隠れて見えないはずの天体が見えたり、暗い天体が明るく見えたりする現象である。

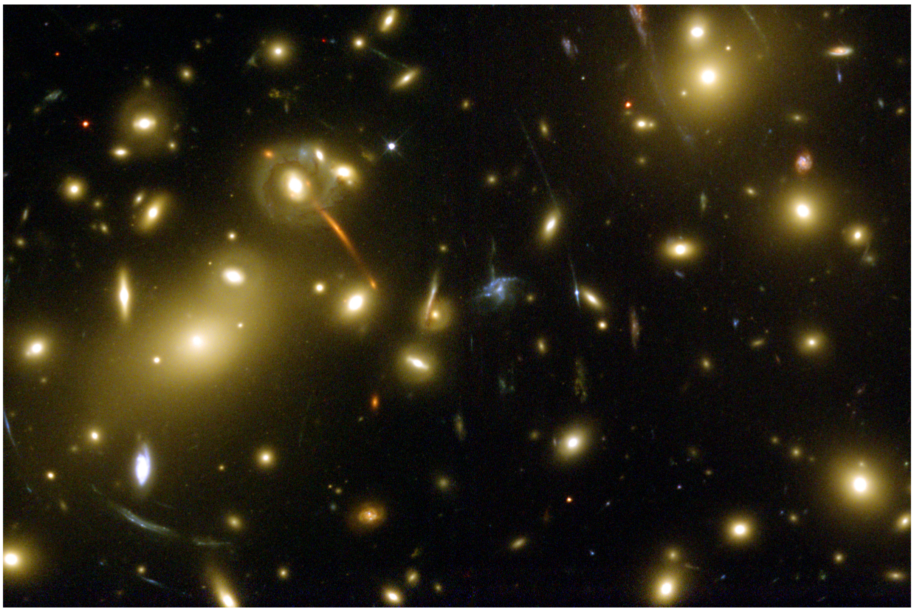


図 7.3　HST/WFPC2 (Wide Field Planetary Camera 2) が撮影した**重力レンズ銀河団** Abell 2218。弧状に歪められた背景銀河が多数映っている。

7.1　光線の湾曲

重力レンズ効果はもともと、一般相対論からの帰結としてその存在が予想された。それによると、質量 M の天体から距離 b だけ離れた所を通る光は

$$\hat{\alpha} \simeq \frac{2r_{\mathrm{S}}}{b} = \frac{4GM}{bc^2} \tag{7.2}$$

だけ曲げられる。対する古典力学からは

$$\hat{\alpha} \simeq \frac{r_{\mathrm{S}}}{b} = \frac{2GM}{bc^2} \tag{7.1}$$

という、式 (7.2) のちょうど半分の値が得られる。ただし実際の観測値は式 (7.2) を再現した[*1]。

[*1] 詳細は補足資料 E を参照。ただし以降は原文に合わせて、光の曲がり角を $\Delta\theta$ の代わりに $\hat{\alpha}$ と書くことにする。式 (7.2), (7.1) はともに $b = R$ (R は星の半径) のとき最大値をとるが、そのとき $\hat{\alpha}$ は

$$\hat{\alpha} \propto \frac{GM}{R} = \Phi \qquad (\Phi\text{は単位質量あたりのポテンシャル})$$

と表せる。この式を見ると重力場が光を歪めることが理解しやすいかもしれない。

しかし形が歪んでいる銀河は、本当に重力レンズ効果を受けて歪んでいるのだろうか？　単に歪んで見えている訳でなく、形が実際に歪んでいることはないのだろうか？　この可能性を検証するには、次のような方法がある：

- 重力レンズ効果との一貫性を調べる
  ⟶ 対象の銀河の形やレンズとの位置関係が重力レンズ効果から予想されるものと一致していれば、その銀河は重力レンズ効果で歪んでいる。ただし、是非の判断を下すにはデータが足りない場合が多い。
- 波長依存性を調べる
  ⟶ 光は必ず測地線に沿って走るので、その軌跡は波長によらない。したがって対象の銀河のスペクトルが波長に関して一定（**アクロマート**）ならば、その銀河は重力レンズ効果で歪んでいる（図 7.5）。ただし歪みが真に重力レンズ効果によるものだったとしても、次のような場合はスペクトルが一定にならない：
  - ダストによる減光があるとき、
  - 対象の銀河自身に色の勾配があるとき（**differential magnification**；図 7.4）。

  ただし前者については、ダストが透明な電波で観測すれば問題はない。

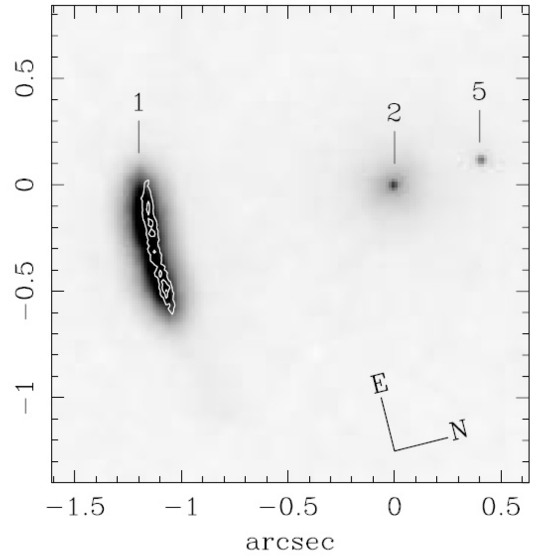


図 7.4　“1” は FSC 10214+4724、“2” は重力レンズ銀河。グレースケールは $\lambda = 814$ nm, 等高線は $\lambda = 437$ nm。両者の波長で FSC 10214+4724 の形は一致していない。

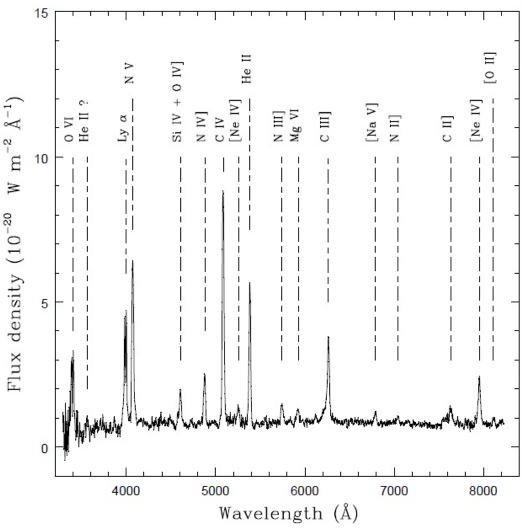


図 5.8　FSC 10214+4724 単体のスペクトル（再）。

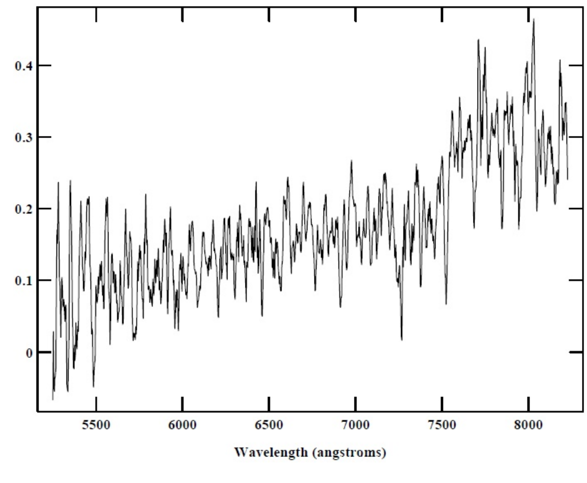


図 7.5　FSC 10214+4724 に対する重力レンズ銀河のスペクトル。4000 Å ブレイクが 7600 Å 付近に移っていることから、この銀河までの距離は $z = 0.9$ と求められる。

7.2　重力レンズ方程式

7.2.1　重力レンズ方程式

まずⒶ 背景銀河 S・重力レンズ銀河 L・観測者 O がすべて共通平面上にあり[*2]、かつⒷ 重力レンズ銀河が広がりのない点源である場合を考える（図 7.7）。Ⓐでない場合は**問 7.2, 7.5** を、Ⓑでない場合は 7.3.3 節以降を参照のこと。

[*2] 以降 重力レンズ効果を及ぼす側の銀河を**重力レンズ銀河/銀河団 (lensing galaxy/cluster)** もしくは単に**レンズ (lens)**、重力レンズ効果によって歪められる側の銀河を**背景銀河 (source)** と呼ぶことにする。

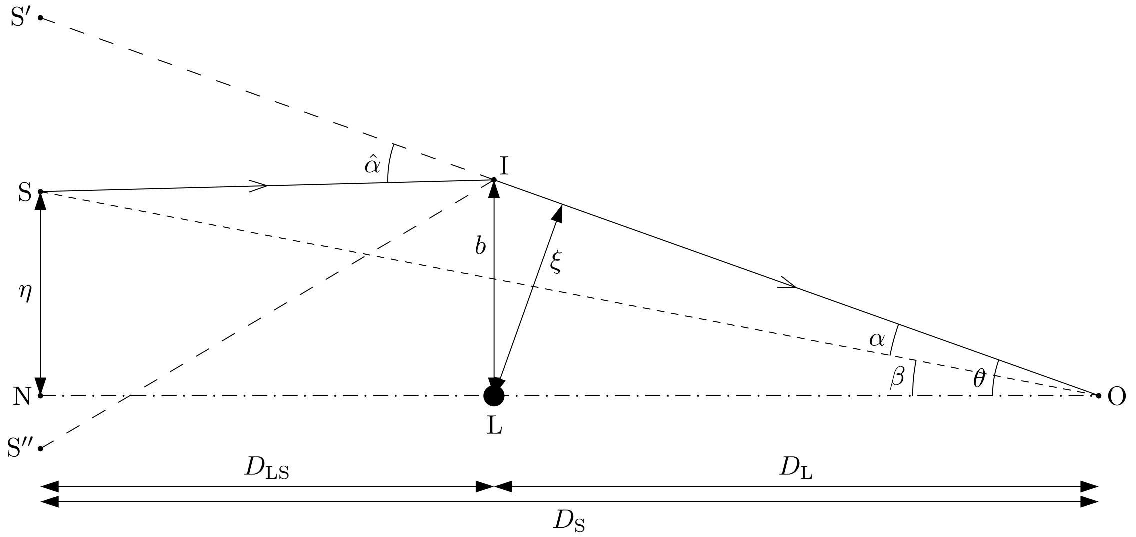


図 7.7　各記号の定義。S は背景銀河、S′ は S の**像** (**image**；複数存在する場合は**多重像** (**multiple images**))、S″ は S′ に対応する**逆像** (**counter image**)、L はレンズ、O は観測者。D はいずれも角径距離。

まず図 7.7 より明らかに

$$\beta = \theta - \alpha \tag{7.3}$$

であるが、これを**重力レンズ方程式**という。また再び図 7.7 より

$$D_{\mathrm{S}}\beta = \eta = \overline{\mathrm{AS}'} - \overline{\mathrm{SS}'} = D_{\mathrm{S}}\theta - D_{\mathrm{LS}}\hat{\alpha}, \qquad \therefore\ \beta = \theta - \frac{D_{\mathrm{S}}}{D_{\mathrm{LS}}}\hat{\alpha}$$

なので、これを式 (7.3) と比べて

$$\hat{\alpha} = \frac{D_{\mathrm{S}}}{D_{\mathrm{LS}}}\alpha \tag{7.6}$$

を得る。さらに式 (7.2) を用いると式 (7.3) は

$$\beta = \theta - \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}}\hat{\alpha} = \theta - \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}}\frac{2r_{\mathrm{S}}}{b} = \theta - \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{S}}}\frac{2r_{\mathrm{S}}}{\theta} \tag{7.8}$$

となるが、さらに 7.2.2 節に登場する

$$\theta_{\mathrm{E}} \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{S}}}} = \sqrt{2r_{\mathrm{S}}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{L}}D_{\mathrm{S}}}} \tag{7.9}$$

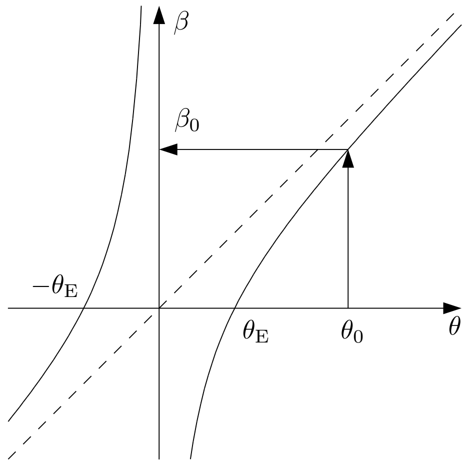
も使えば、結局

$$\beta = \theta - \frac{{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{\theta} \tag{7.12}$$

が導かれる。これを θ の 2 次方程式として解くと

$$\theta = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\mathrm{E}}}^2}}{2}\ (> \beta), \qquad \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\mathrm{E}}}^2}}{2}\ (< 0) \tag{7.13}$$

を得るが、これら 2 解のうち前者は図 7.7 における像 S′ を、後者は同じく逆像 S″ をそれぞれ表す。



補足図 7.1　式 (7.12), (7.13) のグラフ。1 つの $\theta = \theta_0$ に対しては 1 つの $\beta = \beta_0$ が対応するが、逆に 1 つの β に対しては正負 2 つの θ が対応する。

問 7.1　(1) 角径距離 D_{LS} を共動距離 d_L, d_{S} で表せ。ただし宇宙は平坦 ($k = 0$) とする。
(2) (1) の結果より、$D_{\mathrm{S}} \neq D_{\mathrm{LS}} + D_{\mathrm{L}}$ であることを確かめよ。

解答　(1) 1.10 節より、角径距離 D は固有距離 r および共動距離 d と

$$D = \frac{r}{1+z} = \frac{d}{1+z} \qquad (k = 0\ のとき) \tag{1.50}$$

で関係するのであった。ゆえに、共動距離がその定義より明らかに $d_{\mathrm{S}}=d_{\mathrm{LS}}+d_{\mathrm{L}}$ をみたすことも合わせると

$$D_{\mathrm{LS}}=\frac{d_{\mathrm{LS}}}{1+z_{\mathrm{LS}}}=\frac{d_{\mathrm{S}}-d_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{LS}}} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成立する。ただし z_{LS} は重力レンズ銀河 L から見た背景銀河 S の赤方偏移であり、

$$1+z_{\mathrm{LS}}=\frac{R_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{S}}}=\frac{R_0/R_{\mathrm{S}}}{R_0/R_{\mathrm{L}}}=\frac{1+z_{\mathrm{S}}}{1+z_{\mathrm{L}}}$$

z_{S}，z_{L} はそれぞれ背景銀河・レンズの赤方偏移

をみたす。これを式①に代入して、

$$D_{\mathrm{LS}}=\frac{d_{\mathrm{S}}-d_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{LS}}}=\underline{\frac{1+z_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{S}}}(d_{\mathrm{S}}-d_{\mathrm{L}})}$$

を得る。■

(2) (1) より

$$D_{\mathrm{LS}}=\frac{1+z_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{S}}}(d_{\mathrm{S}}-d_{\mathrm{L}}),\qquad D_{\mathrm{L}}=\frac{d_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{L}}},\qquad D_{\mathrm{S}}=\frac{d_{\mathrm{S}}}{1+z_{\mathrm{S}}}$$

である。したがって、確かに

$$D_{\mathrm{LS}}+D_{\mathrm{L}}=\frac{1+z_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{S}}}(d_{\mathrm{S}}-d_{\mathrm{L}})+\frac{d_{\mathrm{L}}}{1+z_{\mathrm{L}}}\neq\frac{d_{\mathrm{S}}}{1+z_{\mathrm{S}}}=D_{\mathrm{S}}$$

である。■

問 7.2, 7.5　(1) 重力レンズ方程式：

$$\beta=\theta-\alpha(\theta) \tag{7.3}$$

は背景銀河 S・観測者 O・レンズ L が共通平面上にないときには成り立たないが、その場合でも

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \tag{7.4}$$

として成立する。これを示せ。

(2) 式 (7.4) は θ と β の方程式であるが、θ と β は一対一対応するか？

解答　(1) 式 (7.4) の各ベクトルを、図 7.7 においてそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{NS}}\equiv D_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{NS'}}\equiv D_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\theta}$, $\overrightarrow{\mathrm{SS'}}\equiv D_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\alpha}$ と定義する。このとき

$$D_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\beta}\equiv\overrightarrow{\mathrm{NS}}=\overrightarrow{\mathrm{NS'}}-\overrightarrow{\mathrm{SS'}}\equiv D_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\theta}-D_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\alpha},\qquad \therefore\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\alpha}, \tag{7.4}$$

なので、確かに式 (7.4) は成立する。■

(2) 式 (7.4) において $\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{\theta}$ の関数なので、$\boldsymbol{\theta}\longmapsto\boldsymbol{\beta}$ は単射であるが $\boldsymbol{\theta}\longleftarrow\boldsymbol{\beta}$ は単射でない。これは前掲の補足図 7.1 からも明らかである。■

7.2.2　SLO が同一直線上にいる場合：Einstein リング

前節で議論した共通平面 + 質点レンズにおける重力レンズ方程式の中で重要なのが、特に

Ⓒ 背景銀河 S・レンズ L・観測者 O が同一直線上にいる ($\Longleftrightarrow$ $\beta=\eta=0$)

場合である。このとき背景銀河 S はレンズ L の周りに輪状に歪んで見える（補足図 7.2）が、この輪を **Einstein リング**という。その視半径は

$$\beta=\theta-\frac{{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{\theta} \tag{7.12}$$

において $\beta=0$ として、

$$\theta=\theta_{\mathrm{E}}\equiv\sqrt{2r_{\mathrm{S}}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}D_{\mathrm{L}}}}=\sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}}D_{\mathrm{L}}}}\ (>0) \tag{7.9}$$

である。この θ_{E} を **Einstein 角**といい、θ_{E} に対応する

$$r_{\mathrm{E}} \equiv D_{\mathrm{L}}\theta_{\mathrm{E}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{\mathrm{LS}}D_{\mathrm{L}}}{D_{\mathrm{S}}}}$$

を **Einstein 半径**という。Eintein 角 (7.9) の具体的な値は、M が銀河スケールの場合

$$\theta_{\mathrm{E}} = \left(\frac{M}{10^{11.1}\ M_{\odot}}\right)^{1/2}\left(\frac{D_{\mathrm{S}}D_{\mathrm{L}}/D_{\mathrm{LS}}}{\mathrm{Gpc}}\right)^{-1/2}\ \mathrm{arcsec}, \tag{7.10}$$

太陽以下のスケール（**重力マイクロレンズ効果**；7.8 節）の場合

$$\theta_{\mathrm{E}} = \left(\frac{M}{1.23\ M_{\odot}}\right)^{1/2}\left(\frac{D_{\mathrm{S}}D_{\mathrm{L}}/D_{\mathrm{LS}}}{10\ \mathrm{kpc}}\right)^{-1/2}\ \mathrm{mas} \tag{7.11}$$

である。

補足図 7.2　Einstein リングの例。（左）LRG 3-757：別名 Cosmic Horseshoe。（右）SDSS J1038 + 4849：別名 Smiley, Cheshire Cat。右は 2 つ 1 組のレンズ銀河が Einstein リングを作っている。

7.3　面輝度保存と像の拡大率

7.3.1　面輝度の保存

重力レンズは像の形を歪ませるだけでなく、その光を強める効果ももつ*3。これは重力レンズ効果があっても面輝度*4が保存する一方、像は重力レンズ効果により広がって見えるので、全体の明るさは強められるためである。

面輝度が保存する理由は次の通り：エネルギー $E \longrightarrow E + \mathrm{d}E$ の光子が、立体角 $\mathrm{d}\Omega$ の領域から時間 $\mathrm{d}t$ のうちに N 個望遠鏡に入射したとする。このとき望遠鏡の広さを $\mathrm{d}A$ とおくと、光子たちが $\mathrm{d}t$ のうちに占める体積要素は

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \mathrm{d}A\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} = p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}\Omega = \frac{E^2}{c^3}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E \qquad\qquad (E = cp)$$

である。したがって入射光子たちの位相数密度は

$$n = \frac{N}{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}} = \frac{Nc^3}{E^2\mathrm{d}A\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E} = \frac{Nc^3}{h^3\nu^2\mathrm{d}A\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu} \tag{7.14}$$

となるが、これは **Liouville の定理**により保存する。すると面輝度は

$$I_\nu \equiv \frac{h\nu \times N}{\mathrm{d}A\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu} \propto n\nu^3 \propto \nu^3 \tag{7.15}$$

と書けるが、重力レンズ効果を通して ν が変化しないことから結局 I_ν は保存する。■

しかし、この増光はエネルギー保存則を破らないのだろうか？　面輝度が保存したまま像が広がるならば、その分だけ余計な光子が生まれているのではないか？　これらに対する答えは、以下の理由より否である。

*3 重力レンズ効果は、像の歪みや増光の程度に応じて**強い重力レンズ効果**と**弱い重力レンズ効果**に分類される。
*4 復習：単位時間・単位面積・単位立体角・単位周波数あたりのエネルギーのこと。比強度。資料 3.4 節を参照。

- 拡大された像 A とは別の所には縮小された像 B があり、光子数は全体で保存する。
- 空間の歪みにより全立体角が 4π よりも小さくために、像は見かけ上 増光されているだけである。

7.3.2 像の拡大率

いま重力レンズ効果により、像の微小立体角が $\mathrm{d}\Omega \longrightarrow \mathrm{d}\Omega' \equiv \mu \mathrm{d}\Omega$ と変化したとする。ここに μ は像の**拡大率（倍率）**であり、上の仮定より

$$\mu \equiv \frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\beta^2} = \frac{\theta}{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta} \tag{7.16}$$

と定義される。

また上と同じとき、背景銀河の明るさ（フラックス密度）$\mathrm{d}S_\nu$ も、面輝度 I_ν が保存することより

$$\mathrm{d}S_\nu \longrightarrow \mathrm{d}S'_\nu \equiv I'_\nu \times \mathrm{d}\Omega' = I_\nu \times \mu \mathrm{d}\Omega = \mu \times \mathrm{d}S_\nu$$

と変化する。すなわち、像の拡大率 μ はフラックス密度の変化率にも等しい：

$$\mu \equiv \frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}S'_\nu}{\mathrm{d}S_\nu}.$$

問 7.6, 7.7　(1) 共通平面 + 質点レンズの場合における像の拡大率が

$$\mu = \left[1 - \left(\frac{\theta_\mathrm{E}}{\theta}\right)^4\right]^{-1} \tag{7.17}$$

で与えられることを示せ。

(2) $\theta < \theta_\mathrm{E}$ のとき、(1) の μ は負になる。この物理的意味を説明せよ。

解答　(1) 7.2.2 節の

$$\beta = \theta - \frac{{\theta_\mathrm{E}}^2}{\theta} \tag{7.12}$$

より、式 (7.16) の μ は

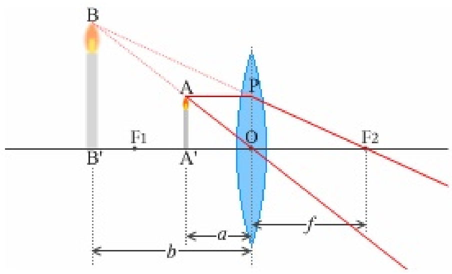
$$\mu \equiv \left(\frac{\beta}{\theta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} = \left[\left(1 - \frac{{\theta_\mathrm{E}}^2}{\theta^2}\right)\cdot\left(1 + \frac{{\theta_\mathrm{E}}^2}{\theta^2}\right)\right]^{-1} = \left[1 - \left(\frac{\theta_\mathrm{E}}{\theta}\right)^4\right]^{-1} \tag{7.17}$$

と求められる。■

(2) $\theta < \theta_\mathrm{E}$ のとき、観測されるのは逆像である。これはちょうど右補足図 7.3 で、ろうそくと同じ側に虚像が見えるのと同じ状況である：

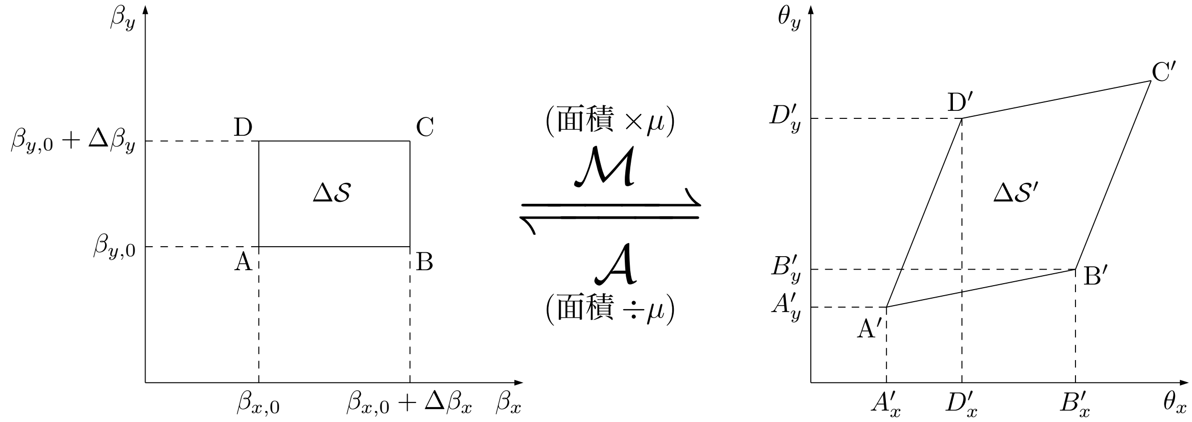
$$\begin{array}{rcl}
\beta & \longleftrightarrow & a; \\
\left(\begin{array}{l}\text{像のとき} > \theta_\mathrm{E}, \\ \text{逆像のとき} < \theta_\mathrm{E}\end{array}\right) \theta & \longleftrightarrow & b \left(\begin{array}{l}\text{実像のとき} > 0, \\ \text{虚像のとき} < 0\end{array}\right); \\
\theta_\mathrm{E} & \longleftrightarrow & f; \\
\mu \equiv \dfrac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\beta^2} & \longleftrightarrow & m \equiv \dfrac{b}{a}; \\
\dfrac{1}{\beta^2} - \dfrac{1}{\theta^2} = \dfrac{{\theta_\mathrm{E}}^4}{\theta^2\beta^2} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}.
\end{array}$$

■



補足図 7.3　ろうそくを凸レンズの焦点距離 f より近い所に置くと、同じ側に虚像が観測される。

前頁の**問 7.6, 7.7** では共通平面 + 質点レンズを仮定した。より一般にレンズの形が球対称である場合についても同じ結論が導かれるが、次は共通平面の仮定も外して、もっとも一般的な場合の μ の表式を考えてみよう。



補足図 7.4　背景銀河と像の関係。広がり ($\beta_{x,0}$–$\beta_{x,0}+\Delta\beta_x$, $\beta_{y,0}$–$\beta_{y,0}+\Delta\beta_y$) の長方形状の背景銀河 ABCD（面積 $\Delta\mathcal{S}$）が、重力レンズ効果 $\mathcal{M}:\ \boldsymbol{\beta}\longmapsto\boldsymbol{\theta}$ によって平行四辺形状の像 A′B′C′D′（面積 $\Delta\mathcal{S}'$）に拡大される。

いま上補足図 7.4 のように、面積 $\Delta\mathcal{S}$ をもつ長方形状の背景銀河 ABCD が、重力レンズ効果 $\mathcal{M}:\ \boldsymbol{\beta}\longmapsto\boldsymbol{\theta}$ によって面積 $\Delta\mathcal{S}'$ をもつ平行四辺形状の像 A′B′C′D′ に拡大されたとする。このとき像の各頂点の座標は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= (\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}),\ \theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0})),\\
\mathrm{B}' &= (\theta_x(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}),\ \theta_y(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0})),\\
\mathrm{C}' &= (\theta_x(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y),\ \theta_y(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y)),\\
\mathrm{D}' &= (\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y),\ \theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y))
\end{aligned}
$$

なので、像 A′B′C′D′ の面積は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\times\overrightarrow{\mathrm{A'D'}}\right|\\
&= \left|\begin{pmatrix} B'_x-A'_x\\ B'_y-A'_y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} D'_x-A'_x\\ D'_y-A'_y\end{pmatrix}\right|\\
&= \begin{vmatrix} B'_x-A'_x & D'_x-A'_x\\ B'_y-A'_y & D'_y-A'_y\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \theta_x(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0})-\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) & \theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y)-\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0})\\ \theta_y(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0})-\theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) & \theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y)-\theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0})\end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

である。ここで平均値の定理より

$$
\begin{aligned}
\theta_x(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0})-\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) &= \Delta\beta_x\frac{\partial\theta_x}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0}+\sigma\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}) \qquad (0<{}^{\exists}\sigma<1),\\
\theta_y(\beta_{x,0}+\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0})-\theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) &= \Delta\beta_x\frac{\partial\theta_y}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0}+\sigma'\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}) \qquad (0<{}^{\exists}\sigma'<1),\\
\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y)-\theta_x(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) &= \Delta\beta_y\frac{\partial\theta_x}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\tau\Delta\beta_y) \qquad (0<{}^{\exists}\tau<1),\\
\theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\Delta\beta_y)-\theta_y(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) &= \Delta\beta_y\frac{\partial\theta_y}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\tau'\Delta\beta_y) \qquad (0<{}^{\exists}\tau'<1)
\end{aligned}
$$

が成立するので、これらを式②に代入して

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{S} &= \begin{vmatrix} \Delta\beta_x\dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0}+\sigma\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}) & \Delta\beta_y\dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\tau\Delta\beta_y)\\ \Delta\beta_x\dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0}+\sigma'\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}) & \Delta\beta_y\dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\tau'\Delta\beta_y)\end{vmatrix}\\
&= \Delta\beta_x\Delta\beta_y\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0}+\sigma\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}) & \dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\tau\Delta\beta_y)\\ \dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0}+\sigma'\Delta\beta_x,\ \beta_{y,0}) & \dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}+\tau'\Delta\beta_y)\end{vmatrix} \simeq \Delta\beta_x\Delta\beta_y\times|J_{\mathcal{M}}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0})|
\end{aligned}
$$

を得る。ここに

$$J_{\mathcal{M}}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) \equiv \det(M) \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right| \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) & \dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) \\ \dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_x}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) & \dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_y}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0}) \end{vmatrix}$$

を、写像 $\mathcal{M}:\ \boldsymbol{\beta} \longmapsto \boldsymbol{\theta}$ の **Jacobian** というのであった。背景銀河の面積は $\Delta\mathcal{S} = \Delta\beta_x\Delta\beta_y$ なので、以上より、写像 $\mathcal{M}$ による面積の拡大率は

$$\mu \equiv \frac{\Delta\mathcal{S}'}{\Delta\mathcal{S}} \simeq \frac{\Delta\beta_x\Delta\beta_y|J_{\mathcal{M}}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0})|}{\Delta\beta_x\Delta\beta_y} = |J_{\mathcal{M}}(\beta_{x,0},\ \beta_{y,0})| = |\det(M)|$$

と求められる。一方 像 A′B′C′D′ から背景銀河 ABCD への写像 $\mathcal{A}:\ \boldsymbol{\theta} \longmapsto \boldsymbol{\beta}$ は $\mathcal{M}$ の逆写像であり、上の式と

$$\mu = |\det(M)| = |\det(A^{-1})| = \frac{1}{|\det(A)|} \qquad \left[A \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\beta_x}{\partial\theta_x}(\theta_{x,0},\ \theta_{y,0}) & \dfrac{\partial\beta_x}{\partial\theta_y}(\theta_{x,0},\ \theta_{y,0}) \\ \dfrac{\partial\beta_y}{\partial\theta_x}(\theta_{x,0},\ \theta_{y,0}) & \dfrac{\partial\beta_y}{\partial\theta_y}(\theta_{x,0},\ \theta_{y,0}) \end{pmatrix}\right]$$

と関係する。このことから M を**拡大テンソル**、A を**拡大逆テンソル**とそれぞれ呼ぶ[*5]。

特に共通平面 + 球対称の下では $(\beta_x,\ \beta_y) = (\beta\cos\varphi,\ \beta\sin\varphi)$, $(\theta_x,\ \theta_y) = (\theta\cos\varphi,\ \theta\sin\varphi)$ とおけるので、拡大率は

$$\mu = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_x} & \dfrac{\partial\theta_x}{\partial\beta_y} \\ \dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_x} & \dfrac{\partial\theta_y}{\partial\beta_y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(\theta\cos\varphi)}{\partial(\beta\cos\varphi)} & \dfrac{\partial(\theta\cos\varphi)}{\partial(\beta\sin\varphi)} \\ \dfrac{\partial(\theta\sin\varphi)}{\partial(\beta\cos\varphi)} & \dfrac{\partial(\theta\sin\varphi)}{\partial(\beta\sin\varphi)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta} & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta} \end{vmatrix} = \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}\right|^2 \simeq \frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\beta^2} = \frac{\theta}{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta} \tag{7.16}$$

となって確かに式 (7.16) を再現する。

例題 7.1 (1) 像 S′ と逆像 S″ の拡大率をそれぞれ μ', μ'' とおくとき、全体としての拡大率 $\mu \equiv |\mu'| + |\mu''|$ が

$$\mu = \frac{2 + (\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}}$$

で与えられることを示せ。

(2) (1) の μ は常に 1 よりも大きい。これはエネルギー保存則を破らないか？

解答 (1) 再び式 (7.12) より

$$\beta = \theta - \frac{{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{\theta} \quad\Longleftrightarrow\quad \theta^2 = \beta\theta + {\theta_{\mathrm{E}}}^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \theta^2 - \beta\theta - {\theta_{\mathrm{E}}}^2 = 0 \qquad \cdots\cdots③$$

なので、式 (7.15) の μ は

$$\mu = \left[1 - \left(\frac{\theta_{\mathrm{E}}}{\theta}\right)^4\right]^{-1} \qquad \textbf{式 (7.15) より}$$

$$= \frac{\theta^4}{\theta^4 - {\theta_{\mathrm{E}}}^4} \qquad \textbf{変形した}$$

$$= \frac{\theta^4}{(\beta\theta + {\theta_{\mathrm{E}}}^2)^2 - ({\theta_{\mathrm{E}}}^2)^2} \qquad \textbf{式③より}$$

$$= \frac{\theta^4}{(\beta\theta + \cancel{{\theta_{\mathrm{E}}}^2} - \cancel{{\theta_{\mathrm{E}}}^2})(\beta\theta + {\theta_{\mathrm{E}}}^2 + {\theta_{\mathrm{E}}}^2)} \qquad \textbf{変形した}$$

$$= \frac{\theta^2}{\beta(\beta + 2{\theta_{\mathrm{E}}}^2/\theta)} \qquad \textbf{分母子 } \boldsymbol{\div\theta^2}$$

$$= \theta - \beta \qquad \textbf{式③より}$$

$$= \frac{\theta^2}{\beta(2\theta - \beta)} \qquad \textbf{変形した}$$

$$= \frac{\theta^2}{\pm\beta\sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\mathrm{E}}}^2}} \qquad \textbf{式 (7.13) より}$$

$$= \pm\frac{(\theta/\theta_{\mathrm{E}})^2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}} \qquad \cdots\cdots④$$

[*5] 以上の議論は、「微小面積は座標変換 Φ に対して $\Delta\mathcal{S} \longrightarrow |J_\Phi|\Delta\mathcal{S}$ と変換する」ことを再確認しているだけである。ここでは $\det(M)$ が 写像： **背景平面** $\longrightarrow$ **像平面**（ともに 7.6 節で後述）における Jacobian、$\det(A)$ が 像平面 $\longrightarrow$ 背景平面 における Jacobian である。

と計算できる。また式③の解を $\theta \equiv \theta', \theta''$ とおくと、解と係数の関係より

$$\theta'^2 + \theta''^2 = (\theta' + \theta'')^2 - 2\theta'\theta'' = \beta^2 + 2{\theta_{\mathrm{E}}}^2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である。式④, ⑤より、題意の μ は確かに

$$\mu \equiv |\mu'| + |\mu''| = \frac{(\theta'^2 + \theta''^2)/{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}} = \frac{(\beta^2 + 2{\theta_{\mathrm{E}}}^2)/{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}} = \underline{\frac{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}}}$$

となる。■

(2) 7.3.1 節で述べたのと同じ理由により、エネルギーは保存する。これは、(1) の μ に符号を含めたものが

$$\tilde{\mu} \equiv \mu' + \mu'' = \frac{(\theta'^2 - \theta''^2)/{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}} = \frac{\left(\beta\sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\mathrm{E}}}^2}\right)/{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})\sqrt{(\beta/\theta_{\mathrm{E}})^2 + 4}} = 1$$

となることからも納得できる。■

7.3.3　拡大バイアス

次に重力レンズ銀河が 1 つではなく、複数ある場合を考えよう。これらのレンズはそれぞれが相異なる拡大率 μ をもち、それらの分布はある確率分布 $F(\mu) = \mathrm{Pr}(\text{拡大率} = \mu)$ に従う。レンズたちの個数密度は十分に小さいので、簡単のために宇宙膨張による効果を無視すれば、ふつう $F(\mu)$ は $\mu = 1$ に鋭いピークをもつ。

しかしレンズたちに固有の確率分布が

$$F(\mu) = \mathrm{Pr}(\text{拡大率} = \mu)$$

に従っていても、観測される $F(\mu)$ がそれに一致するとは限らない。なぜならばレンズたちの source counts が $\mathrm{d}N/\mathrm{d}S \propto S^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ であるとき (図 7.9)、暗いレンズほど個数が多いので、$\mu > 1$ なる拡大率の方が支配的である。したがって、$F(\mu)$ は μ がより大きい側に歪む。これを**拡大バイアス**という。

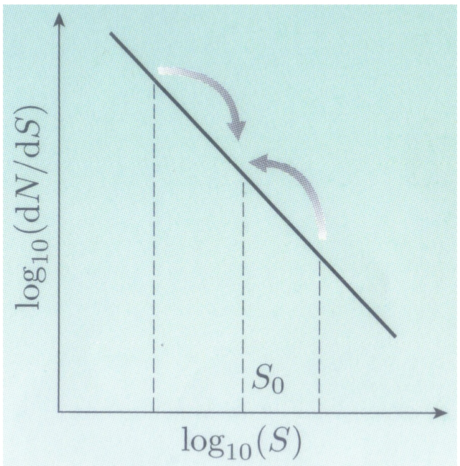


図 7.9　重力レンズ銀河のもつ source counts: $\mathrm{d}N/\mathrm{d}S \propto S^{-\alpha}$。$\alpha > 0$ より、暗い（S が小さい）側で個数 N が多い。

7.4　特異等温球モデル

7.3.3 節では複数の重力レンズ銀河を仮定したが、これはレンズが 1 つ質点であると考えるよりも現実的である。そこでこの節ではレンズが広がりをもっていると仮定して、そのふるまいを調べよう。

いまレンズに含まれる個々の星がガス中の粒子と同様にふるまうと考えて、

$$P(r) = \frac{\rho(r)}{m} k_{\mathrm{B}} T \qquad \textbf{状態方程式 } (m \textbf{ は銀河の典型的な質量}) \quad \cdots\cdots ⑥,$$

$$m\sigma^2 = k_{\mathrm{B}} T \qquad \textbf{エネルギー } (\sigma^2 \textbf{ は速度分散}) \quad \cdots\cdots ⑦,$$

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2} \qquad \textbf{静水圧平衡} \quad \cdots\cdots ⑧,$$

$$\frac{\mathrm{d}M(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho(r) \qquad \textbf{連続の式} \quad \cdots\cdots ⑨$$

の 4 式から出発する。まず式⑥, ⑦より $P(r) = \sigma^2 \rho(r)$ なので、これを式⑧に代入して

$$\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{G}{\sigma^2} \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \qquad \cdots\cdots ⑧'$$

を得る。この両辺を r で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho(r)}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{G}{\sigma^2}\left[\frac{\rho(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}M(r)}{\mathrm{d}r} + M(r)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} - 2\frac{\rho(r)}{r^3}\right)\right]$$

なので、これに式 ⑧′, ⑨を代入して

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\rho(r)}{\mathrm{d}r^2} &= -\frac{G}{\sigma^2}\left[\frac{\rho(r)}{r^2}\cdot 4\pi r^2\rho(r) - \frac{\sigma^2}{G}\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} - 2\frac{\rho(r)}{r^3}\right)\right],\\
\therefore\ \frac{\mathrm{d}^2\rho(r)}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{\rho(r)}\left(\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} &= -\frac{4\pi G}{\sigma^2}\rho^2(r),\\
\therefore\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r}\right) &= -\frac{4\pi G}{\sigma^2}\rho(r) \qquad \cdots\cdots ⑩
\end{aligned}
$$

を得る。この解として $\rho(r) = Ar^\alpha$ ($A,\ \alpha$は定数) を仮定して式⑩に代入すると、

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\alpha}{r}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{4\pi G}{\sigma^2}\cdot Ar^\alpha
$$

より係数を比べて $\alpha = -2,\ A = \sigma^2/2\pi G$ を得る。したがって

$$
\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2} \tag{7.21}
$$

である。以上より、右補足図 7.5 における斜線部の柱密度 $\Sigma(b)$ は

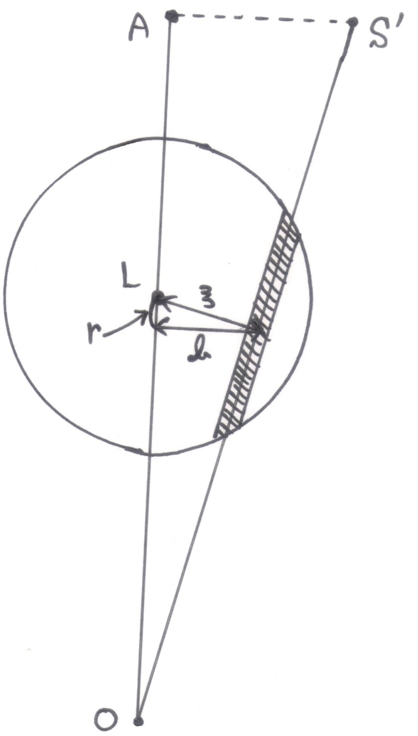
$$
\begin{aligned}
\Sigma(b) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\xi)\mathrm{d}r && \boldsymbol{\xi^2 = r^2 + b^2}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2+b^2}\mathrm{d}r && \textbf{式 (7.21) より}\\
&= \cancel{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\cancel{2}\pi G}\left[\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{r}{b}\right)\right]_0^{+\infty} && \textbf{積分した}\\
&= \frac{\sigma^2}{2G}\frac{1}{b} && \textbf{計算した}, \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

$0 \le r \le b$ に含まれる質量 $M(b)$ は

$$
M(b) \equiv \int_0^b \Sigma(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\pi\sigma^2}{G}\int_0^b \mathrm{d}r = \frac{\pi\sigma^2}{G}b \tag{7.23}
$$

とそれぞれ求められる。この質量分布を**特異等温球モデル** (Singular Isothermal Sphere: **SIS モデル**) [*6] という。

では、SIS モデルにおける重力レンズ効果を調べよう。



補足図 7.5　各変数の定義。本書とは b と ξ が逆になっている。

- 光の曲がり角 (7.2) は、式 (7.23) より

$$
\hat{\alpha} \simeq \frac{4GM(b)}{bc^2} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \simeq 1.4\left(\frac{\sigma}{220\ \mathrm{km\ s^{-1}}}\right)^2\ \mathrm{arcsec}
$$

となる。また Einstein 角 (7.9) は

$$
\theta_\mathrm{E}^{\cancel{2}} \equiv \frac{4GM(b)}{c^2}\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}D_\mathrm{L}} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\cancel{b}\cdot\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}}\frac{\cancel{\theta_\mathrm{E}}}{\cancel{b}}, \qquad \therefore\ \theta_\mathrm{E} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}} \tag{7.26}
$$

である。

- 重力レンズ方程式：

$$
\beta = \theta - \alpha \tag{7.3}
$$

は式 (7.13) より、特別な場合として $\theta(\beta=0) = \pm\theta_\mathrm{E}$ ($\iff \alpha(\beta=0) = \pm\theta_\mathrm{E}$) を含まねばならない。したがって式 (7.3) は、一般に

$$
\beta = \theta \mp \theta_\mathrm{E} \iff \theta = \theta_\pm \equiv \beta \pm \theta_\mathrm{E} \tag{7.27}
$$

という形をとる。この解は次頁の図 7.11（左）で与えられる。

[*6] 「特異」は球の中心で $\rho(r \searrow 0) \longrightarrow +\infty,\ \Sigma(b \searrow 0) \longrightarrow +\infty$ であること、「等温」は $T = \mathrm{const.}$ を仮定していることに由来する。

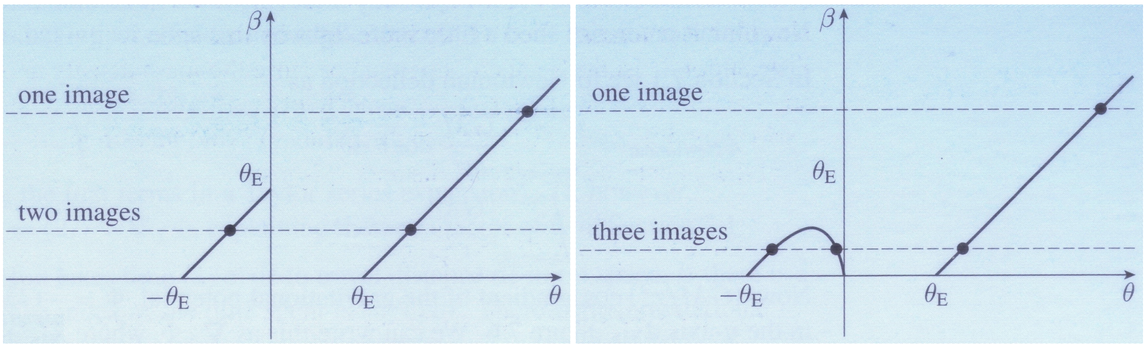


図 7.11　（左）SIS モデル式の解 (7.27)。（右）“滑らかな”SIS モデルの解。

- 像の拡大率 μ は、式 (7.27) より

$$\mu = \frac{\theta}{\beta}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}}_{=1} = \frac{\theta_\pm}{\theta_\pm \mp \theta_\mathrm{E}} = \left(1 \mp \frac{\theta_\mathrm{E}}{\theta_\pm}\right)^{-1} \qquad \text{(以上 複号同順)} \tag{7.29}$$

となる。これは質点レンズを仮定した式 (7.17) とは結果が異なっている。

問 7.8　(1) 柱密度 $\Sigma = \mathrm{const.}$ で無限に広い重力レンズ銀河を考える。このとき、角 α が

$$\alpha = \frac{4\pi G\Sigma}{c^2}\frac{D_\mathrm{L}D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}}\theta$$

で与えられることを示せ。

(2) 柱密度 Σ が

$$\Sigma = \Sigma_\mathrm{crit} \equiv \frac{c^2}{4\pi G}\frac{D_\mathrm{S}}{D_\mathrm{L}D_\mathrm{LS}} \tag{7.30}$$

をとるとき、$\alpha = \theta$ である。これはどのような状況か？

解答　(1) $\Sigma = \mathrm{const.}$ のとき、式 (7.23) より

$$M(b) \equiv \int_0^b \Sigma \cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \pi\Sigma\int_0^b 2r\mathrm{d}r = \pi\Sigma b^2$$

である。したがって式 (7.7) より、確かに

$$\alpha = \frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}}\cdot\frac{4GM(b)}{bc^2} = \frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}}\cdot\frac{4G}{\cancel{b}c^2}\cdot\Sigma b^{\cancel{2}} = \frac{4\pi G\Sigma}{c^2}\frac{D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}}\cdot D_\mathrm{L}\theta = \frac{4\pi G\Sigma}{c^2}\frac{D_\mathrm{L}D_\mathrm{LS}}{D_\mathrm{S}}\theta$$

となる。■

(2) $\Sigma = \Sigma_\mathrm{crit}$ のとき $\alpha = \theta$ なので、θ の値に関わらず $\beta = 0$ である。これは、すべての像が $\beta = 0$ の 1 点に集まっている（すべての像の焦点が合っている）ことを表す。■

細かいことを言えば、像は $\theta = \theta_\pm$ の 2 つに加えて $\theta = 0$ にも存在する（$\theta = 0$ は対称性よりそもそも計算の対象外だったので、今まで登場しなかった）。しかしこの点源を発する光は当然小さく、現実には観測されない。

それでも特異等温球以外のモデルでは、$\theta \neq 0$ に第 3 の像が観測される場合がある（例：“滑らかな”SIS モデル、図 7.11（右））。この第 3 の像の位置を観測すると、重力レンズ銀河の質量分布モデルに制限をかけることができる。

〈今回のまとめ〉

・**重力レンズ効果**……光が質量 M の天体から距離 b だけ離れた所を通ると、その重力によって軌道が

$$\hat{\alpha} \simeq \frac{2r_{\mathrm{S}}}{b} = \frac{4GM}{bc^2} \tag{7.2}$$

だけ曲げられる。すると銀河の背後に隠れて見えないはずの天体が見えたり、暗い天体が明るく見えたりする。

・**重力レンズ方程式**……もっとも一般には $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})$。

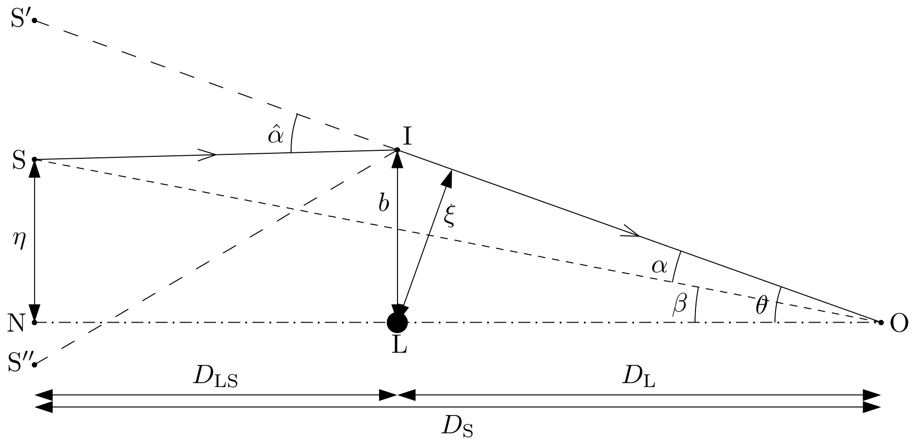


図 7.7　各記号の定義。S は**背景銀河 (source)**、S′ は S の**像 (image)**、S″ は S′ に対応する S の**逆像 (counter image)**、L は**重力レンズ銀河/銀河団 (lens)**、O は観測者。D はいずれも角径距離。

- 特にⒶ 系がすべて共通平面上にあるとき：スカラーで $\beta = \theta - \alpha$。
  - さらにⒷ 重力レンズ銀河が点源であるとき：

$$\beta = \theta - \frac{{\theta_{\mathrm{E}}}^2}{\theta} \iff \theta = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4{\theta_{\mathrm{E}}}^2}}{2} \qquad \textbf{+ は像 S}', \textbf{ − は逆像 S}''. \tag{7.12, 7.13}$$

  * さらにさらにⒸ 背景銀河 S・レンズ L・観測者 O が同一直線上にいるとき：

$$\theta = \theta_{\mathrm{E}} \equiv \sqrt{2r_{\mathrm{S}} \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}} D_{\mathrm{L}}}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{S}} D_{\mathrm{L}}}} \qquad \textbf{Einstein 角}, \tag{7.9}$$

$$r = r_{\mathrm{E}} \equiv D_{\mathrm{L}} \theta_{\mathrm{E}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{\mathrm{LS}} D_{\mathrm{L}}}{D_{\mathrm{S}}}} \qquad \textbf{Einstein 半径}.$$

  - **特異等温球 (SIS) モデル**の場合：

$$\beta = \theta_{\pm} \mp \theta_{\mathrm{E}} \tag{7.27}$$

・**像の拡大率**……$\mathrm{d}\Omega \longrightarrow \mathrm{d}\Omega'$, $S_\nu \longrightarrow S'_\nu$ のとき、$\mu \equiv \mathrm{d}\Omega'/\mathrm{d}\Omega = S'_\nu/S_\nu$。

また背景銀河 S から像 S′ への Jacobian を $\det(M)$、その逆写像の Jacobian を $\det(A)$ とそれぞれおくと、

$$\mu \equiv \frac{\Delta \mathcal{S}'}{\Delta \mathcal{S}} = |\det(M)| = \frac{1}{|\det(A)|} \qquad \left[M \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \equiv \left(\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^{-1} \equiv A^{-1} \right]. \tag{7.18}$$

- 特にⒶ 系がすべて共通平面上にあるとき：

$$\mu = \frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\beta^2} = \frac{\theta}{\beta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}. \tag{7.16}$$

  - さらにⒷ 重力レンズ銀河が点源であるとき：

$$\mu = \left[1 - \left(\frac{\theta_{\mathrm{E}}}{\theta} \right)^4 \right]^{-1}. \tag{7.17}$$

  - **特異等温球 (SIS) モデル**の場合：

$$\mu = \left(1 \mp \frac{\theta_{\mathrm{E}}}{\theta_{\pm}} \right)^{-1}. \tag{7.29}$$

〈単語リスト〉

p.216

- caeteris paribus = all other things being equal

p.217

- transpire 「明らかになる」
- interlope 「干渉する」
- The hunt is on for sth. 「〜が待たれている」

p.220

- beguiling 「おもしろい、ゆかいな」 $\longrightarrow$ beguilingly (adv.)
- wary 「慎重な」 $\leftrightarrow$ unwary

p.225

- skewed 「傾いた」

p.229

- cusp 「尖った部分」