第 13 回　2016/9/8（木）　最終改訂　2016/9/12（月）

〈前回の復習〉

・**偏光**：電磁波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t) = (E_1\boldsymbol{e}_x + E_2\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ において $E_i = a_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i}$ $(i = 1,\ 2)$ と分解するとき、$\delta_2 = \delta_1$ だと**直線偏光**、$\delta_1 \neq \delta_2$ だと**楕円偏光**、特に $\delta_2 = \delta_1 \pm \pi/2$ だと**円偏光**。

・**Stokes パラメータ**：

$$I \equiv |E_1|^2 + |E_2|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2, \qquad Q \equiv |E_1|^2 - |E_2|^2 = {a_1}^2 - {a_2}^2,$$
$$U \equiv 2\,\mathrm{Re}[E_1 E_2^*] = 2a_1a_2\cos(\delta_1 - \delta_2), \qquad V \equiv 2\,\mathrm{Im}[E_1 E_2^*] = 2a_1a_2\sin(\delta_1 - \delta_2).$$

これらは $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ をみたす。

・Thomson 散乱における偏光：自由電子は CMB 光子を Thomson 散乱させ、非常に効率良く直線偏光を作り出す。直線偏光は $\boldsymbol{E}$**-モード**と $\boldsymbol{B}$**-モード**に分けられ、温度ゆらぎも合わせてさらに **EE-モード** (パワースペクトル C_ℓ^{EE})、**BB-モード** (C_ℓ^{BB})、**TT-モード** (C_ℓ^{TT})、**TE-モード** (C_ℓ^{TE}) に分けられる（他のモードのスペクトルは 0)。

E-モードの偏光は線型密度ゆらぎに、B-モードの偏光は弱い重力レンズ効果や**初期重力波**といった非線型の効果に由来する。

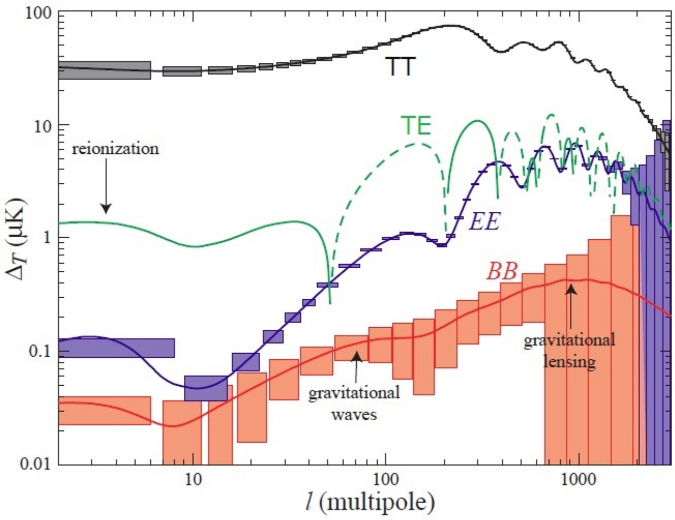


図 2.15　4 つの角度パワースペクトル $C_\ell^{\mathrm{TT}},\ C_\ell^{\mathrm{EE}},\ C_\ell^{\mathrm{BB}},\ C_\ell^{\mathrm{TE}}$。

・ダークエネルギー：Einstein 方程式を

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\tilde{T}_{\mu\nu} \qquad \left(\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}\right)$$

と書いて宇宙定数 Λ を物質場の一部と見なすとき、Λ の状態方程式は $w_\Lambda = -1$ をみたす。

さらに Λ が物質場の一部であるならば、もはや定数である必要はない。より一般に、時刻に伴って変化するような Λ を**ダークエネルギー**という。

・宇宙の運命：ダークエネルギー優勢期 $\Omega_\Lambda \simeq 1$ には

$$\frac{H^2}{{H_0}^2} \simeq \Omega_{\Lambda,0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+w_\Lambda)}$$

となるので、$w_\Lambda < -1$ のときには H は $+\infty$ に発散し、事象の地平線の共動大きさ d_{E} は 0 に収束する。このとき宇宙膨張が他のすべての力の強さを上回り、いかなる構造もその形を保てず崩壊してしまう（**ビッグリップ**）。ビッグリップが起こる時刻 $t = t_{\mathrm{rip}}$ は

$$t_{\mathrm{rip}} = t_0 + \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\,|1 + w_\Lambda|}.$$

ブラックホール—それは、我々の宇宙に存在するなかでもっとも完全な天体である。ブラックホールの構造を決めるのは唯一、我々の時空に対する認識なのだから。

Subrahmanyan Chandrasekhar（アメリカの天体物理学者）

6　ブラックホール

銀河進化を語る上で**ブラックホール**の存在を欠かすことはできない。なぜならば宇宙で生み出される光の主産地の一つが、物質がブラックホールに落ち込むときに解放される重力エネルギーだからである。この光はとてつもなく明るいために—ブラックホールは“暗闇(ブラック)”からはほど遠い位置にいる。

6.1　ブラックホールとは

6.1.1　ブラックホールの基本モデル

ブラックホールの研究は、18 世紀後半の P. S. Laplace や J. Michell が「自身の質量が大きすぎて、光すら逃げられない天体がある」という着想をしたことで始まった。Michell は天球上で重なって見える星が空間的にも集団を成していることを示し、また多数の星からなる連星系では星たちがある大質量の星を周回している可能性を提唱した。

その後光の波動説が主流になるとブラックホールの理論は忘れ去られるが、1915 年に A. Einstein が一般相対性理論を発表し、次いで K. Schwartzchild が Einstein 方程式の特殊解を得たことで再び表舞台に立つことになる。これはこの特解が「原点に質点があり、その周囲の時空は球対称で回転していない」という、ブラックホールが備えているであろう性質と同じ条件における解だったためである。

〈Schwarzchild ブラックホール〉

宇宙定数のない Einstein 方程式：

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

を、① 時空が真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) かつ② 球対称という条件下で解くと、

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r_\mathrm{S}/r} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{6.1}$$

を得る[*1]。これを **Schwarzchild 解**といい、これに基づくブラックホールのモデルを **Schwarzchild ブラックホール**という。ただし r_S は

$$r_\mathrm{S} \equiv \frac{2GM}{c^2} \simeq 3.0\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ \mathrm{km} \qquad (M\ \text{はブラックホールの質量})$$

であり、**Schwarzchild 半径**と呼ばれる。以下にこの Schwarzchild ブラックホールの特徴を挙げておこう。

- $r = r_\mathrm{S}$ よりも内側には重力場は存在しない。また外部の重力場は、原点に全質量が局在したときに作られる重力場と等しい。これら重力場の性質は、古典力学における万有引力の法則と共通している。
- 外部 ($r > r_\mathrm{S}$) から $r = r_\mathrm{S}$ に向かって真っすぐに進んでくる光を考える。この場合 $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ なので、

$$0 = \mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r_\mathrm{S}/r}, \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)$$

である。したがって $r \searrow r_\mathrm{S}$ で $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \nearrow 0$ なので、光は $r = r_\mathrm{S}$ に到達できない。これは、光が $r = r_\mathrm{out}$ から $r = r_\mathrm{in}$ ($r_\mathrm{S} < r_\mathrm{in} < r_\mathrm{out}$) に到達するまでの時間が

$$\Delta t = -\int_{r_\mathrm{out}}^{r_\mathrm{in}} \frac{\mathrm{d}r}{1 - r_\mathrm{S}/r} = r_\mathrm{out} - r_\mathrm{in} + r_\mathrm{S}\ln\left(\frac{r_\mathrm{out} - r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{in} - r_\mathrm{S}}\right) \longrightarrow +\infty \qquad (r_\mathrm{in} \searrow r_\mathrm{S})$$

となることからも理解できる。また同様に、光が $r=r_{\mathrm{in}}(\nearrow r_{\mathrm{S}})$ から $r=r_{\mathrm{out}}$ に到達するまでの時間も無限大になる。したがって $r=r_{\mathrm{S}}$ よりも外側からやってきた光は $r=r_{\mathrm{S}}$ に到達できないし、逆に $r=r_{\mathrm{S}}$ を発した光も外部にいる観測者に到達できない。このことから、Scwarzchild 半径 $r=r_{\mathrm{S}}$ を**事象の地平線**とも呼ぶ。

- 上記の通り光は有限の 時間 内に $r=r_{\mathrm{S}}$ に到達することはできないが、有限の 固有時間 内には $r=r_{\mathrm{S}}$ に到達できる。なぜならば

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=g_{tt}\cdot\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}=-\sqrt{-g_{tt}}=-\left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)^{-1/2}$$

と書き換えて上式の積分を実行しなおすと、Δt に対応する固有時間として

$$\Delta\tau=-\int_{r_{\mathrm{out}}}^{r_{\mathrm{in}}}\left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)^{-1/2}\mathrm{d}r=\sqrt{r_{\mathrm{out}}(r_{\mathrm{out}}-r_{\mathrm{S}})}-\sqrt{r_{\mathrm{in}}(r_{\mathrm{in}}-r_{\mathrm{S}})}+r_{\mathrm{S}}\ln\left(\frac{\sqrt{r_{\mathrm{out}}}+\sqrt{r_{\mathrm{out}}-r_{\mathrm{S}}}}{\sqrt{r_{\mathrm{in}}}+\sqrt{r_{\mathrm{in}}-r_{\mathrm{S}}}}\right)$$

を得る。したがって、$r_{\mathrm{in}}\searrow r_{\mathrm{S}}$ としても

$$\Delta\tau\xrightarrow[r_{\mathrm{in}}\searrow r_{\mathrm{S}}]{}\sqrt{r_{\mathrm{out}}(r_{\mathrm{out}}-r_{\mathrm{S}})}+r_{\mathrm{S}}\ln\left(\sqrt{\frac{r_{\mathrm{out}}}{r_{\mathrm{S}}}}+\sqrt{\frac{r_{\mathrm{out}}}{r_{\mathrm{S}}}-1}\right)<+\infty$$

となって発散しない。つまり、
  - 外部にいる観測者から見ると光の時計はどんどん遅れていくので、光は有限の時間内に地平線に到達できない
  - 光とともに走る観測者から見ると自身の時計は遅れないので、観測者は有限の固有時間で地平線に到達できる

という訳である。ただし観測者がいったん地平線の内側に入ると、外部との連絡手段は失われる。
- Schwarzchild ブラックホールの中心（原点）には特異点が存在する。この特異点は（特異点に見えはするが、実は観測可能な領域を分かつだけの事象の地平線と違って）真の 特異点であり、地平線より内側にあるすべての物質はこの特異点に捕らわれ、潰される。この状況は物理的に破綻しているように思えるが、実際に起こってもよいことが R. Penrose と S. Hawking によって示された（**Penrose–Hawking の特異点定理**）。

Schwarzchild ブラックホールに限らず、一般のブラックホールの性質はその 質量・角運動量（スピン）・電荷 の 3 つだけで完全に記述される。逆にこれら 3 つ以外のすべての情報は、地平線の外側からは観測できない。これを**ブラックホール無毛定理**、もしくは**ブラックホール脱毛定理**という。そしてこの無毛定理は、

① 無限遠における時空が平坦 ($r\to+\infty$ で $g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$)
② 時空が定常 ($g_{tt}=0$)
③ 地平線の外に特異点がない
④ 電荷がない

のすべてをみたす解は、**Kerr 解**に限られる

という**ブラックホールの唯一性定理**に同値である。ここに言う Kerr 解とは次のようなものである。

〈Kerr ブラックホール〉

Kerr 解（**Kerr–Newman 解**）とは

$$\mathrm{d}s^2=-\frac{\Delta\rho^2}{A}\mathrm{d}t^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2+\frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}(\mathrm{d}\varphi-\Omega_{\mathrm{D}}\mathrm{d}t)^2$$

のことであり（導出過程は省略）、これに基づくブラックホールのモデルを **Kerr ブラックホール**という。ただしブラックホールの質量 M および角運動量 J に対し、

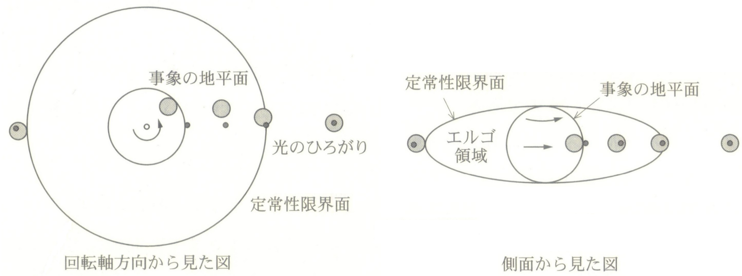
$$a\equiv\frac{J}{M},\quad \Delta\equiv r^2-r_{\mathrm{S}}r+a^2,\quad \rho^2\equiv r^2+a^2\cos^2\theta,\quad A\equiv(r^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2\theta,\quad \Omega_{\mathrm{D}}\equiv\frac{ar_{\mathrm{S}}}{A}r$$

[*1] 詳細は別紙「Schwarzchild 解とブラックホール」を参照。また Minkowski 計量はこれまで本書に合わせて $\eta_{\mu\nu}\equiv\mathrm{diag}(+,\ -,\ -,\ -)$ としてきたが、以降は宇宙論の慣習に合わせて $\eta_{\mu\nu}\equiv\mathrm{diag}(-,\ +,\ +,\ +)$ とする。さらにこれ以降、一般相対論の文脈では自然単位系を用いる。

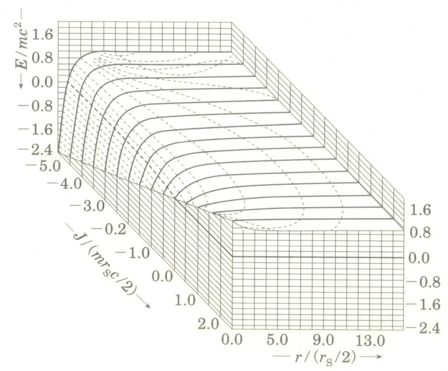
である。またブラックホールが裸の特異点（後述）をもたないためには、$-r_{\mathrm{S}}/2 < a < r_{\mathrm{S}}/2$ が必要である。では、Kerr 解についても特徴をまとめておこう。

- Scwarzchild 解と違い、$g_{\varphi\varphi}$ が g_{tt} と関係している；すなわち $g_{t\varphi}$ の項が残っている。この項は z 軸中心に Ω_{D} で回転する回転座標系をとることで消えるが、それでも Kerr 解が Schwarzchild 解に帰着する訳では ない。
- Kerr 解は 2 つの "臨界半径" をもつ（補足図 6.1）：
  ① 事象の地平線……$g_{rr} \to +\infty$ より、
  $$r_- = \frac{r_{\mathrm{S}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_{\mathrm{S}}}{2}\right)^2 - a^2}.$$
  ② **エルゴ面（定常性限界面）**……ブラックホールによって空間が "引きずられる" 速度[*2]が光速に等しくなる半径。$g_{tt} = 0$ より、
  $$r_+ = \frac{r_{\mathrm{S}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_{\mathrm{S}}}{2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta}.$$

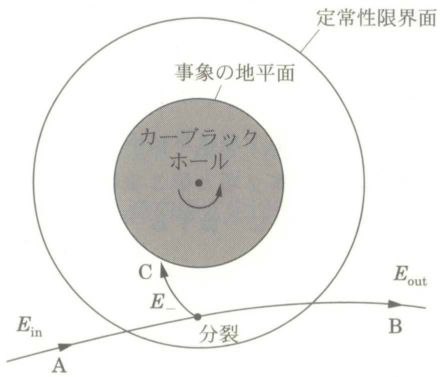
  $r_- \le r \le r_+$ に広がる領域は、**エルゴ領域**と呼ばれる。補足図 6.2 に示されているように、エルゴ領域に侵入した粒子の全エネルギーは負の値をとり得る。すると補足図 6.3 のような場合、エネルギー保存則から $E_{\mathrm{out}} = E_{\mathrm{in}} - E_- > E_{\mathrm{in}}$ が成立し、粒子はエネルギーを余計に獲得する。すなわち、ブラックホールから回転のエネルギーを取り出すことができる[*3]のである（**Penrose 過程**）。



補足図 6.1　Kerr ブラックホールの概念図。



補足図 6.2　Kerr ブラックホールの周りを回る物体の全エネルギー E を、比角運動量 j と中心からの距離 r（どちらも $r_{\mathrm{S}}/2$ で規格化）の関数として表した図。j と r が小さい領域（図左奥）で $E < 0$ になっている。



補足図 6.3　Penrose 過程。エネルギー E_{in} で Kerr ブラックホールに侵入した粒子がエルゴ領域で 2 つの粒子に分裂し、片方がエネルギー $E_- < 0$ の軌道に入り、もう片方はエネルギー E_{out} でエルゴ領域を脱出する。

[*3] 空間がブラックホールによって引きずられることを **frame dragging** という。

[*3] とは言え、現実にはこのようなエネルギーの取り出しは起こりにくい。それでも、磁場の下では同様のエネルギーの取り出しが可能であるという説が提唱されている (Blandford & Znajek 1977, MNRAS, **179**, 433)。

6.1.2　裸の特異点問題

先に Kerr ブラックホールは $-r_{\mathrm{S}}/2 < a < r_{\mathrm{S}}/2$ をみたす必要があると述べたが、角運動量が $a \geq M$ をみたすほど大きいようなブラックホールが存在するかはまだ分かっていない。仮にそのようなブラックホールがあった場合、上の r_{-} の式を見ると、事象の地平線が存在できなくなることが分かる。すると Kerr ブラックホールに落ち込む物質は地平線で食い止められることなく中心の特異点に到達してしまう[*4]。また Kerr ブラックホールにおける世界線は光円錐の space-like 側 ($\mathrm{d}\tau^2 < 0$) で閉じることになり、ブラックホールがあたかもタイムマシンのようにふるまう。

このように事象の地平線に守られていない特異点のことを**裸の特異点**というが、裸の特異点が実在するか否かについてはまだ決着がついていない。例えば Penrose は裸の特異点は存在しないと仮定したが、これを**宇宙検閲官仮説**という。また同じく反対派の Hawking は、上述の space-like なループ（要するに時間を遡ること）は自然によって禁止されているとする**因果律保護仮説**を提唱した。

しかし一般相対論は時刻に関して対称なので、時間遡行は問題ないとする人がいるかもしれない。実際時間を反転させたブラックホールは "ホワイトホール" と呼ばれてはいるが、ホワイトホールの存在はエントロピー増大則に反するという理由で否定されている。とは言えホワイトホールは、Kerr ブラックホールを考えるときにも避けられない問題である。なぜならば Kerr ブラックホールの曲率特異点 $r = r_{-} \to 0$ は点でなくリング状に伸びているので、$r = r_{+} \to 0$ に沿って動く粒子が事象の地平線 $r = r_{-}$ の内側に入り込み、ホワイトホールから出てくるかもしれないためである。しかし当然だが、特異点については理解すべきことがまだまだ残されている。

6.2　Eddington 限界

ブラックホールの周囲にあるガスが互いの摩擦によって減速すると、ブラックホールに落ち込んで重力エネルギーを解放する（静止質量の一部が光度に変換される）：

$$L = \eta \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} c^2 \propto \dot{M} \qquad (0 \leq \eta \leq 1). \tag{6.7}$$

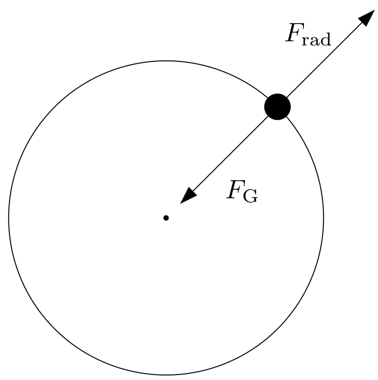
これを**質量降着**といい、落ち込んだガスが作る円盤を**降着円盤**という。式 (6.7) を見ると $\dot{M}$ を大きくすればするほど光度 L も限りなく大きくなっていくように思えるが、実は L には上限がある。この値を求めよう。

まずブラックホールから距離 r だけ離れている電子が輻射圧力 F_{rad} を受け、微小時間 Δt に距離 $c\Delta t$ だけ動いたとする。このとき、F_{rad} が電子に対してした仕事は $F_{\mathrm{rad}} \times (c\Delta t)$ ……① である。一方この仕事により電子が得たエネルギーは、L が単位時間・単位面積あたりのエネルギーであることに注意して

$$L \times \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi r^2} \times \Delta t \qquad \cdots\cdots ②$$

である。すると①と②が等しいことより、

$$F_{\mathrm{rad}} \times (c\Delta t) = L \times \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi r^2} \times \Delta t, \qquad \therefore\ \underline{F_{\mathrm{rad}} = \frac{L\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi r^2 c}} \tag{6.3}$$



補足図 6.4　質点 ● にかかる輻射圧力 F_{rad} と重力 F_{G} が釣り合う。

を得る。ただし電子による Thomson 散乱断面積の表式が

$$\sigma_{\mathrm{T,e}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} c^2} \right)^2 \propto {m_{\mathrm{e}}}^{-2}$$

で与えられていたことを思い出すと、陽子による Thomson 散乱断面積も同様に $\sigma_{\mathrm{T,p}} \propto {m_{\mathrm{p}}}^{-2}$ に従う。しかし

$$\frac{\sigma_{\mathrm{T,e}}}{\sigma_{\mathrm{T,p}}} = \left(\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}} \right)^2 = \left(\frac{1.7 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}} \right)^2 \sim 10^6 \gg 1$$

[*4] 特異点が地平線に守られず外部から見えてしまうと、その特異点から出てくる情報に何の制限も与えられないため、初期値を設定したところで何の物理も予言できない。

なので、陽子による散乱（陽子にかかる輻射圧力）は無視しても構わない。一方上記の電子や陽子にはたらく重力が古典力学で書けるとき、その大きさ $F_{\rm G}$ は

$$F_{\rm G} = \frac{GM(m_{\rm e}+m_{\rm p})}{r^2} \simeq \frac{GMm_{\rm p}}{r^2} \tag{6.4}$$

で与えられる（右辺の近似は

$$\frac{m_{\rm p}+m_{\rm e}}{m_{\rm p}} = \frac{(1.7\times10^{-27}+0.91\times10^{-30})\ {\rm kg}}{1.7\times10^{-27}\ {\rm kg}} = 1.0005$$

より、確かに有効である）。

ここで、ブラックホールの成長は式 (6.3) の $F_{\rm rad}$ と式 (6.4) の $F_{\rm G}$ が釣り合うところ：

$$F_{\rm rad} \simeq \frac{L\sigma_{\rm T}}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm_{\rm p}}{r^2} \simeq F_{\rm G} \tag{6.5}$$

で平衡に達すると考えられる。そこで式 (6.4) を整理すると、

$$L = L_{\rm E} \equiv \frac{4\pi GcMm_{\rm p}}{\sigma_{\rm T}} = 1.3\times10^{31}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ {\rm W} \tag{6.6}$$

を得るが、この $L_{\rm E}$ を **Eddington 限界光度**という。L の値はブラックホールとともに成長し、$L_{\rm E}$ に達したところで止まる。■

問 6.1　上述の議論によると輻射圧力はほとんど電子に、重力はほとんど核子（陽子および中性子）に効く。しかもふつう、これらの電子と核子は互いに電離している（プラズマ状態にある）。ならば電子と核子は輻射圧力と重力によってバラバラにされてしまうのではないか？

解答　他の例として、体重 60 kg の人間を電子と核子に分け、互いに 1 m 離れるまで力を加える。このとき必要な力の大きさ F は

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ne)^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\times(8.9\times10^{-12}\ {\rm F\ m^{-1}})}\times\frac{[(60\ {\rm kg})\div(1.7\times10^{-27}\ {\rm kg})\times(1.6\times10^{-19}\ {\rm C})]^2}{(1\ {\rm m})^2} \simeq 2.9\times10^{29}\ {\rm N}$$

である。これを太陽からの輻射だけで賄うには

$$\frac{F}{L_\odot/c} = \frac{2.9\times10^{29}\ {\rm N}}{(3.9\times10^{26}\ {\rm W})\div(3.0\times10^{8}\ {\rm m\ s^{-1}})} \simeq 2.2\times10^{11}\ 個$$

もの太陽が必要であるが、これは実質的には不可能である。したがって、問題文のようなことは考えなくても差し支えない。■

問 6.2–6.3　(1) 太陽について、上記で得た $L_{\rm E}$ の値を実際の光度と比較せよ。
(2) 家庭用電球について、$L_{\rm E}$ の値を実際の光度と比較せよ。

解答　(1)

$$\frac{L_{{\rm E},\odot}}{L_\odot} = \frac{1.3\times10^{31}\ {\rm W}}{3.9\times10^{26}\ {\rm W}} \simeq 750$$

より、$L_{{\rm E},\odot} \gg L_\odot$ である。■
(2) 家庭用でもっとも一般的な E26 口金の白熱電球 (60 W, 30 g) で計算すると、

$$\frac{L_{\rm E,\,電球}}{L_{電球}} = \frac{1.3\times[(30\ {\rm g})\div(2.0\times10^{33}\ {\rm g})]\times10^{31}\ {\rm W}}{60\ {\rm W}} \simeq 3.3\times10^{-3}$$

より $L_{\rm E,\,電球} \ll L_{電球}$ である。とは言え当然電球は星ではないので、輻射で吹き飛ばされるようなことはない。■

L_E を用いると、**Eddington のタイムスケール**、もしくは **Salpeter のタイムスケール**：

$$t_\mathrm{E} \equiv \frac{Mc^2}{L_\mathrm{E}} = \frac{\sigma_\mathrm{T} c}{4\pi G m_\mathrm{p}} \simeq 4.5 \times 10^8 \ \mathrm{yr} \tag{6.8}$$

を定義できる。これは（$L_\mathrm{E} t_\mathrm{E} \sim Mc^2$ と見れば）、ブラックホールが全静止質量を $L = L_\mathrm{E}$ で放出しきるまでにかかる典型的な時間である。また式 (6.6) が任意の時点における L にも適用できるとして式 (6.7) と合わせると、

$$\frac{4\pi G c m_\mathrm{p}}{\sigma_\mathrm{T}} M = L = \eta \dot{M} c^2, \qquad \therefore \ \dot{M} = \frac{4\pi G m_\mathrm{p}}{\eta \sigma_\mathrm{T} c} M = \frac{1}{\eta t_\mathrm{E}} M, \qquad \therefore \ M = M_0 \mathrm{e}^{t/(\eta t_\mathrm{E})}$$

を得るので、M が初期条件 $M(t=0) \equiv M_0$ の e 倍に増えるまでにかかる時間 **(e-folding timescale)** は $t_\mathrm{e} = \eta t_\mathrm{E}$ である。したがって t_E は、**質量降着率** $\eta = 1$ のときの t_e にも相当する。

最期に、Eddington 限界の応用について何点か注意しておこう。

- 上で導いた L_E の表式は球対称な系におけるものであった。したがって球対称性をもたない系に対しては改めて L_E を導出せねばならないが、これはふつう難しいので、数値計算に頼ることになる。しかし数値計算に頼らずとも上と同様な議論でオーダーを評価することはできる。
- ブラックホールの光度がほんの一瞬だけでも L_E を超えると、輻射圧が重力に勝ち、降着していたガスが外部に向かって吹き飛ばされる。このときの光度を**超 Eddington 光度**という。その後はガスの降着量が減ったことで光度も小さくなり、光度は L_E 以下に落ち着く。この機構は大規模な X 線バーストなど、高エネルギー現象を起こす有力な候補である。ただし円盤のような非球対称な系では、円盤と垂直な方向に輻射を出しながらガス自身は中心に落ち込むことで簡単に超 Eddington 光度が実現される。したがって超 Eddington 光度が観測されたからといっても、それが本当に高エネルギー現象だとは限らない。
- 逆に中心が低圧で輻射が非効率な場合、重力が勝ってガスが中心に落ち込む一方 放射冷却は効かないので、中心はどんどん高温になっていく。するとその熱は輻射でなく、ガスの移動（これを対流と区別して**移流**と呼ぶ）によってすばやく運ばれるようになる。このような流れを**移流優勢流** (Advection-Dominated Accretion Flow: **ADAF**(エイダフ)) という。また最近ではより一般に、輻射が非効率な移流をまとめて Radiative Inefficient Accretion Flow: **RIAF**(ライアフ) と呼ぶことも多い。ADAF は Seyfert 1 型 AGN、特に光度の低いもので頻繁に見つかっており、輝線の欠けと強い連続帯のスペクトルが特徴である。

6.3 エネルギー変換効率

6.2 節で述べたように、ブラックホールの周りを回る物質は摩擦などによってエネルギーを失い、ブラックホールはその分の光度を獲得する。これは言い方を変えればもともとの重力エネルギーや静止質量が光度に変換された訳であり、しかもその変換効率は原子爆弾などよりもはるかに良い。“ブラック” ホールという名前を考えれば皮肉なことだが、ブラックホールは宇宙でもっとも “明るい” 天体の 1 つなのである。

ここではそのエネルギーの変換効率を求めたいのだが、そのためにまずは Scwarzchild 時空を運動する粒子の軌跡を求めるところから始めよう。

6.3.1 Scwarzchild 時空における粒子の軌道

Scwarzchild 時空 (6.1) に対するラグランジアンを $\mathscr{L}$ として、作用

$$S = \int \mathscr{L} \mathrm{d}\tau = \int \left[\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - r_\mathrm{S}/r} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \right] \mathrm{d}\tau \qquad \left(\dot{} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \right) \tag{6.9}$$

に対して変分法を適用する。すると Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha} = 0$$

が成立する。これを各成分について書き下すのだが、まず $\mathscr{L}$ は t と φ を顕に含まないので、t について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{t}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[2\left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)\dot{t}\right]=0,\qquad\therefore\ \left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)\dot{t}=\mathrm{const.},\qquad\cdots\cdots③$$

φ について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(-2r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})=0,\qquad\therefore\ 2r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}=\mathrm{const.}\qquad\cdots\cdots④$$

である。これらを定数でおく前に、θ について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(-2r^2\dot{\theta})-(-2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)=0,\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(r^2\dot{\theta})-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=0$$

なので、$r=0$ で $\theta=\pi/2,\ \dot{\theta}=0$ に選ぶと粒子が常に $\theta=\pi/2$ の平面を動くようにできる。要するに、粒子の軌道を $\theta=\pi/2$ と決めても一般性は失われない。すると③, ④はそれぞれ $\theta=\pi/2$ とした上で、

$$\left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)\dot{t}\equiv\varepsilon=\mathrm{const.},\qquad r^2\dot{\varphi}\equiv j=\mathrm{const.}\tag{6.18, 6.19}$$

と定数でおける。最後は r について Euler-Lagrange 方程式を立ててもよいが、ここではその代わりに Schwarzchild 時空 (6.1) で $\theta=\pi/2$ を選んだ

$$\mathrm{d}\tau^2=\left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r_{\mathrm{S}}/r}-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}\varphi^2),\qquad\therefore\ 1=\left(1-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-r_{\mathrm{S}}/r}-r^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)$$

に式 (6.18), (6.19) を代入する。代入した結果を整理すると、

$$\dot{r}^2=(\varepsilon^2-1)-\left(\frac{j^2}{r^2}-\frac{r_{\mathrm{S}}}{r}-r_{\mathrm{S}}\frac{j^2}{r^3}\right)\equiv 2[\mathcal{E}-U_{\mathrm{eff}}(r)]\tag{6.20}$$

が得られる[*5]。ここに $U_{\mathrm{eff}}(r)$ は有効ポテンシャルであり、これの挙動によって粒子の運動が決定される。

式 (6.20) の両辺を r で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2}=-\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{j^2}{r^3}-\frac{1}{2}\frac{r_{\mathrm{S}}}{r^2}-\frac{3}{2}r_{\mathrm{S}}\frac{j^2}{r^4}\tag{6.20$'$}$$

なので、式 (6.20) および (6.20′) を用いて $U_{\mathrm{eff}}(r)$ の挙動を調べる。まず式 (6.20) で $U_{\mathrm{eff}}(r)=0$ とすると

$$r=\begin{cases}r_\pm\equiv\dfrac{1}{2}\dfrac{j^2}{r_{\mathrm{S}}}\left(1\pm\sqrt{1-4\dfrac{{r_{\mathrm{S}}}^2}{j^2}}\right) & (j>2r_{\mathrm{S}}\text{のとき})\\ 2r_{\mathrm{S}} & (j=2r_{\mathrm{S}}\text{のとき})\\ \text{実数解なし} & (j<2r_{\mathrm{S}}\text{のとき})\end{cases}$$

が得られ、次に式 (6.20′) で $\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}(r)/\mathrm{d}r=0$ とすると

$$r=\begin{cases}r_{\mathrm{max,\ min}}\equiv\dfrac{j^2}{r_{\mathrm{S}}}\left(1\pm\sqrt{1-3\dfrac{{r_{\mathrm{S}}}^2}{j^2}}\right) & (j>\sqrt{3}\ r_{\mathrm{S}}\text{のとき})\\ 3r_{\mathrm{S}} & (j=\sqrt{3}\ r_{\mathrm{S}}\text{のとき})\\ \text{実数解なし} & (j<\sqrt{3}\ r_{\mathrm{S}}\text{のとき})\end{cases}$$

が得られる。この結果をまとめると、次の補足表 1 および図 6.4 のようになる。

[*5] 古典力学におけるエネルギーの式：

$$E=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m\omega^2}{2}r^2-\frac{GMm}{r}=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}\qquad(J\equiv mr^2\omega\text{は角運動量})$$

を変形すると、

$$\dot{r}^2=2\frac{E}{m}-\left[\frac{(J/m)^2}{r^2}-\frac{2GM}{r}\right]=2\frac{E-U(r)}{m}$$

となる。これを式 (6.20) と比べると、各物理量がそれぞれ

$$\mathcal{E}\equiv\frac{\varepsilon^2-1}{2}=\frac{E}{m},\qquad j=\frac{J}{m},\qquad U_{\mathrm{eff}}(r)=U(r)-r_{\mathrm{S}}\frac{j^2}{r^2}$$

を意味することが分かる。すなわち ε は運動エネルギー、j は比角運動量である。

補足表 1　比角運動量 j の大きさによる、粒子の軌道の分類。

比角運動量	……のとき、粒子は		
j	中心へ落下する	束縛軌道に入る	非束縛軌道に入る
$2r_S < j$	$E > U_{\rm eff}(r_{\rm min})$	$U_{\rm eff}(r_{\rm max}) \le E \le 0$	$0 < E \le U_{\rm eff}(r_{\rm min})$
$\sqrt{3}\,r_S < j \le 2r_S$	$E > U_{\rm eff}(r_{\rm min})$	$U_{\rm eff}(r_{\rm max}) \le E \le U_{\rm eff}(r_{\rm min})$	—
$j = \sqrt{3}\,r_S$	$E > U_{\rm eff}(3r_S)$	$E = U_{\rm eff}(3r_S)$	—
$j < \sqrt{3}\,r_S$	すべて	—	—

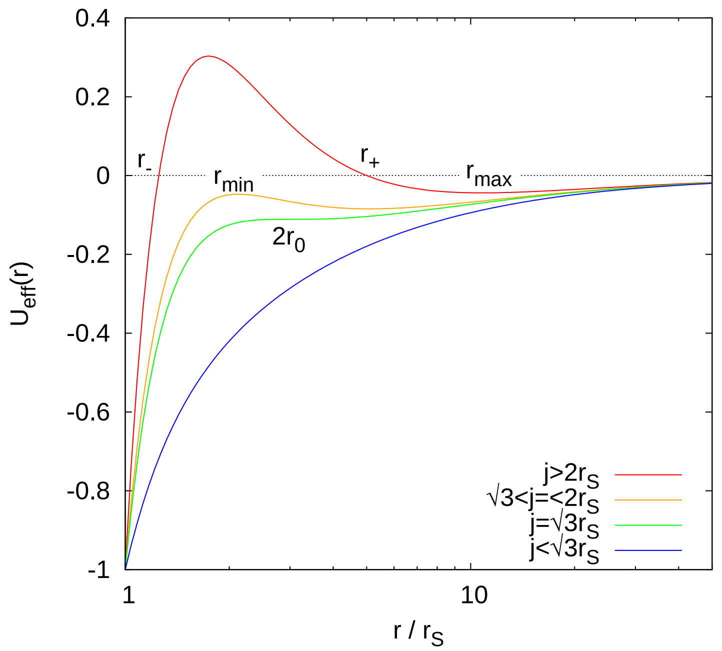


図 6.4　粒子の軌道の分類。上の補足表 1 を図示したもの。

この結果より、特に $j = \sqrt{3}\,r_S$ のときは内外の軌道半径が一致する ($r = r_{\rm max} = r_{\rm min} = 3r_S$)；すなわち粒子の束縛軌道が半径 $3r_S$ の 真 円になることが分かる！　したがって粒子は、この**最近接安定軌道** (Inner-most Stable Circular Orbit: **ISCO**（イスコ）) を安定に周回する。

6.3.2　エネルギー変換効率

では本題に戻って、ブラックホールへの質量降着によるエネルギーの変換効率を求めよう。

粒子が円軌道を周回する場合 $\dot{r} = 0$ なので、式 (6.20) より

$$0 = (\varepsilon^2 - 1) - \left[\frac{(\sqrt{3}\,r_S)^2}{(3r_S)^2} - \frac{r_S}{3r_S} - r_S \times \frac{(\sqrt{3}\,r_S)^2}{(3r_S)^3} \right] = \varepsilon^2 - \frac{8}{9}, \qquad \therefore\ \varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

が得られる。したがってこの粒子が ISCO から中心に落下すると、エネルギーが単位静止質量あたり

$$-\frac{\varepsilon - 1}{1} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \simeq 5.7\ \% \tag{6.22}$$

だけ失われる[*6]。ブラックホールはこれと同じだけのエネルギーを輻射として放出するので、結局この 5.7 % がエネルギーの変換効率である。これは一般的なウラン原子爆弾の効率 (∼ 数 %) と比べると、非常に大きいことが分かる。

また上では Scwarzchild ブラックホールの場合を計算したが、Kerr ブラックホールの場合は $r = 4.5r_S$ と $r = 0.5r_S$ に

[*6] 分母子はどちらも自然単位系 ($c = 1$) かつ単位質量あたりで書いてあるので、静止質量が 1 のように見えていることに注意。

最安定軌道が存在し、エネルギー変換効率はそれぞれの場合について

$$\frac{9-5\sqrt{3}}{9} \simeq 3.8\ \%, \qquad \frac{3-\sqrt{3}}{3} \simeq 42\ \%$$

であることが分かっている。特に後者は 42 % という、電化製品や発電所なみの高いエネルギー変換効率を誇っている！

6.4　ブラックホールの密度パラメータ

Einstein が一般相対論を発表してからさらに半世紀がすぎた 20 世紀後半、A. Soltan はクェーサーの source counts を用いて、宇宙論パラメータには関係なく ブラックホール すべて の質量を求めることに成功した。我々もこの計算を追ってみよう。

ある共動体積 $\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}$ 内におけるクェーサーの全光度を L, 光度関数（単位光度・単位共動体積あたりにあるクェーサーの個数）を ϕ とおくと、$\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}$ が放出する単位共動体積・単位時間あたりのエネルギーは

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}\mathrm{d}t} = L \times \phi \mathrm{d}L \tag{$*$}$$

と表される。ここで ϕ を source counts（単位フラックスあたりの個数）$\mathrm{d}N/\mathrm{d}S$ を用いて

$$\phi \mathrm{d}L \frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}}{\mathrm{d}z} = N = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}(4\pi S) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{左辺の } \mathrm{d}z \text{ は 共動 体積に対する} \\ \text{補正, 右辺の } 4\pi \text{ は全立体角}\end{array}\right)$$

と書き換え、$L \equiv 4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2 S$ (d_{L}は光度距離) と合わせて式 ($*$) に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}\mathrm{d}t} = (4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2 S) \times \left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}(4\pi S) \times \left(\mathrm{d}L\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}\right]\mathrm{d}L = (4\pi d_{\mathrm{L}})^2 S \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}\left(\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}\mathrm{d}S \tag{6.23}$$

となる。さらに下の問 6.4 で示すように

$$4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2 \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1} = \frac{1+z}{c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{6.24}$$

が一般に成り立つので、式 (6.24) を (6.23) に代入して

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}\cancel{\mathrm{d}t}} = \frac{4\pi}{c}(1+z)S\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}S\frac{\mathrm{d}z}{\cancel{\mathrm{d}t}}$$

を得る。最後にこの両辺を積分すれば、全 t、すなわち宇宙開闢以降に存在したすべてのクェーサー から放射されたエネルギー密度が

$$u = \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}} = \frac{4\pi}{c}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z(1+z)\int_0^{+\infty}\mathrm{d}S\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}S \tag{6.25}$$

として求められる*7。この結果は確かに、宇宙論パラメータに依存していない。

問 6.4　式 (6.24) の成立を示せ。

解答　まず Hubble パラメータ $H(t) \equiv \dot{R}/R$ ($R \equiv R_0/(1+z)$ はスケール因子) を z の関数として書けば

$$H(z) \equiv \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{R_0}{1+z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1+z}{R_0}\frac{-R_0}{(1+z)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+z}\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1.28}$$

となるので、

$$c\mathrm{d}t = c\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}\right|\mathrm{d}z = c\frac{1}{(1+z)H(z)}\mathrm{d}z = \frac{c\mathrm{d}z}{(1+z)H(z)} \tag{1.41}$$

が成立する。すると固有体積 $\mathrm{d}V_{\mathrm{prop}}$ は角径距離 $d_{\mathrm{A}} = d_{\mathrm{L}}/(1+z)^2$ を元に

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{prop}} = {d_{\mathrm{A}}}^2 \times (4\pi) \times (c\mathrm{d}t) = 4\pi {d_{\mathrm{A}}}^2 \times \frac{c\mathrm{d}z}{(1+z)H(z)} \tag{1.52}$$

*7 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}S$ が z に依存するので、$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z\cdots$ は発散しない。

と書けるので、これに対応する共動体積 $\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}$ は

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{com}} = \mathrm{d}V_{\mathrm{prop}} \times (1+z)^3 = \left[4\pi \frac{{d_{\mathrm{L}}}^2}{(1+z)^4} \times \frac{c\mathrm{d}z}{(1+z)H(z)}\right] \times (1+z)^3 = \frac{c}{H(z)} \frac{4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2}{(1+z)^2} \mathrm{d}z \tag{6.26}$$

となる。したがって

$$4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2 \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1} = \frac{(1+z)^2}{c} H(z)$$

であるが、これに再び式 (1.28) を適用すれば

$$4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2 \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{com}}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1} = \frac{(1+z)^2}{c} \frac{1}{1+z} \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1+z}{c} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{6.24}$$

を得る。■

では次に式 (6.25) の結果から、現在における 全ブラックホールの質量を導こう。ここで、クェーサーの source counts はふつう全波長にわたる S ではなく B-バンドにおけるフラックス S_{B} を用いて測られることから、

$$S \equiv k_{\mathrm{bol}} S_{\mathrm{B}} \nu_{\mathrm{B}} \qquad\qquad (k_{\mathrm{bol}}\text{は輻射補正})$$

という補正式を用いる。すると式 (6.25) は、

$$u \sim \frac{4\pi}{c} k_{\mathrm{bol}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}S_{\mathrm{B}} (1 + \langle z \rangle_{S_{\mathrm{B}}}) \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S} S_{\mathrm{B}} \nu_{\mathrm{B}} \tag{6.27}$$

と近似される。ここに $\langle z \rangle_{S_{\mathrm{B}}}$ はある S_{B} に対する平均的な z であり、式 (6.27) 全体は 現在における 全クェーサーのエネルギー密度を表していると考えられる。

したがってあとは式 (6.27) を $\rho_{\mathrm{BH}} c^2 = u \times (1-\eta)/\eta$ として、現在におけるブラックホールの質量密度 ρ_{BH} に変換すればよい。ただし η は式 (6.7) に登場した質量 → 光度の変換効率であり、$1-\eta$ はブラックホールを周回する物質のうち、実際に降着する物質の割合を表す。Soltan は式 (6.27) を変換した結果を、

$$\rho_{\mathrm{BH}} \sim 8 \times 10^4 \left(\frac{\eta}{0.1}\right)^{-1} \ M_\odot \ \mathrm{Mpc}^{-3}, \qquad \therefore\ \Omega_{\mathrm{BH}} \sim 6 \times 10^{-7} \left(\frac{\eta}{0.1}\right)^{-1}$$

と計算している（過程は省略）。これは、“活動していない” クェーサー（6.5 節）から得られている

$$\Omega_{\mathrm{BH}} h^2 \sim 3 \times 10^{-7} \left(\frac{\eta}{0.1}\right)^{-1} \left(\frac{1-\eta}{0.9}\right)$$

ともおおよそ辻褄が合っている。ちなみに Salpeter の IMF に対する全恒星の質量密度は

$$\Omega_* h = (2.9 \pm 0.43) \times 10^{-3}$$

であり、上の Ω_{BH} は Ω_* の $0.01h$ % 程度しかない。ただし以上の議論では 2 型 AGN の質量を考慮に入れていなかったので、実際の Ω_{BH} はもっと大きな値をとる。

最後に 1 型 AGN の場合、中心にあるブラックホールの質量は Balmer 線の輝線幅を測ることによっても求められる。具体的には輝線領域において重力が支配的だという仮定の下で、

$$v^2 \sim \frac{GM_{\mathrm{BH}}}{R}, \qquad M_{\mathrm{BH}} \sim v^2 \frac{R}{G}$$

とすればよい。ここに速度幅 v は輝線幅から、輝線領域の半径 R はクェーサーのイオン化モデルか反響マッピング（どちらも後述）を用いて求められる。しかしこの方法では近傍の AGN に対して $\sim 600\ M_\odot\ \mathrm{Mpc}^{-3}$ という極めて小さな結果しか得られておらず、これは現在 “活動していない” クェーサーが支配的であることを示している。

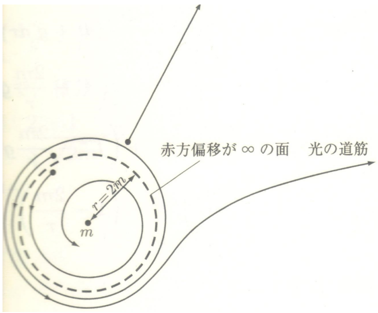
〈今回のまとめ〉

・**Schwarzchild ブラックホール**……Einstein 方程式を① 時空が真空 かつ② 球対称という条件で解くと、

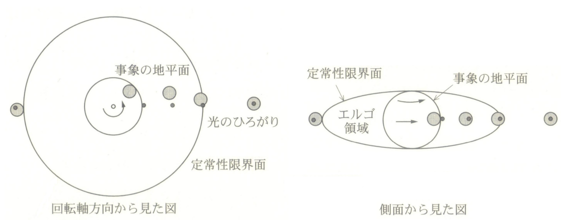
$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r_\mathrm{S}/r} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{6.1}$$

を得る。ここに $r_\mathrm{S} \equiv 2GM/c^2 \simeq 3.0(M/M_\odot)$ km を **Schwarzchild 半径**という。

- $r = r_\mathrm{S}$ よりも外側からやってきた光は $r = r_\mathrm{S}$ に到達できない（到達に無限の時間がかかる）し、逆に $r = r_\mathrm{S}$ を発した光も外部にいる観測者に到達できない。このことから、$r = r_\mathrm{S}$ を**事象の地平線**とも呼ぶ。
- 中心には特異点が存在する。この特異点は見かけ上のものでなく、真の特異点である。



補足図 6.5　Schwarzchild ブラックホール。



補足図 6.1　Kerr ブラックホール。

・**Kerr ブラックホール**……① 無限遠における時空が平坦, ② 時空が定常, ③ 地平線の外に特異点がない, ④ 電荷がないという 4 条件すべてをみたす解は、**Kerr 解**に限られる：

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta\rho^2}{A}\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}(\mathrm{d}\varphi - \Omega_\mathrm{D}\mathrm{d}t)^2.$$

- Kerr 解は 2 つの “臨界半径” をもつ（補足図 6.1）：

$$\text{事象の地平線：}\quad r_- = \frac{r_\mathrm{S}}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_\mathrm{S}}{2}\right)^2 - a^2}, \qquad \textbf{エルゴ面:}\quad r_+ = \frac{r_\mathrm{S}}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_\mathrm{S}}{2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta}.$$

- r_- が存在するためには $-r_\mathrm{S}/2 < a < r_\mathrm{S}/2$ が必要がある。しかし $a \geq M$ なるブラックホールが存在する場合 事象の地平線は存在できず、ブラックホールに落ち込む物質は地平線で食い止められることなく中心の特異点に到達してしまう。このように事象の地平線に守られていない特異点を、**裸の特異点**という。

・**Eddington 限界**……ブラックホールに**降着**する物質にはたらく輻射圧力 F_rad と重力 F_G が釣り合うとき、

$$L = L_\mathrm{E} \equiv \frac{4\pi GcMm_\mathrm{p}}{\sigma_\mathrm{T}} = 1.3 \times 10^{31}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ \mathrm{W}. \tag{6.6}$$

- $F_\mathrm{rad} \gg F_\mathrm{G}$ のとき：一瞬だけ極めて明るく輝き（**超 Eddington 光度**）、その後は L_E 以下に落ち着く。
- $F_\mathrm{rad} \ll F_\mathrm{G}$ のとき：中心の熱が、ガスの**移流**によってすばやく運ばれるようになる（**ADAF**（エイダフ））。

・粒子の軌道とエネルギー変換……

- Scwarzchild ブラックホール：粒子は $j = \sqrt{3}\ r_\mathrm{S}$ のときに、半径 $3r_\mathrm{S}$ の**最近接安定軌道 (ISCO**（イスコ）**)** を回る。この粒子が ISCO から中心に落下すると、その静止質量のうち約 5.7 % が輻射に変換される。
- Kerr ブラックホール：$r = 4.5r_\mathrm{S}$ と $r = 0.5r_\mathrm{S}$ に最安定軌道が存在し、変換効率はそれぞれの場合について約 3.8 %, 42 % である。

・ブラックホールの密度パラメータ……現在における全ブラックホールの質量は

$$\rho_\mathrm{BH} \sim 8 \times 10^4\left(\frac{\eta}{0.1}\right)^{-1} M_\odot\ \mathrm{Mpc}^{-3}, \qquad \therefore\ \Omega_\mathrm{BH} \sim 6 \times 10^{-7}\left(\frac{\eta}{0.1}\right)^{-1}.$$

〈単語リスト〉

p.183

- superposition「重ね合わせ」
- ingenious「独創的な；精巧な」

p.184

- trajectory「軌道、軌跡」
- more than (adv.)「むしろ」

p.185

- conjecture「推測」
- pebble「小石」
- dwell on「〜について長々と話す；あれこれ考える」
- ferocious「残忍な、獰猛な」

p.192

- tedious「退屈な、つまらない」
- prograde「順行の」 $\leftrightarrow$ retrograde「逆行の」

p.194

- dormant「休眠中の」
- reverberate「反射する、反響する」 $\rightarrow$ reverberation (n.)