第 12 回　2016/6/27（月）　最終改訂　2016/6/28（火）

〈前回の復習〉

・CMB の**双極子成分**：地球が CMB の静止系に対して移動することで生じる。

・**バリオン音響振動 (BAO)**：光子・バリオン流体は中心部の光子の圧力により、ゆらぎを音波として伝播させる。この領域を**音地平線**といい、振動がもつ共鳴ピークを**音響ピーク**という。

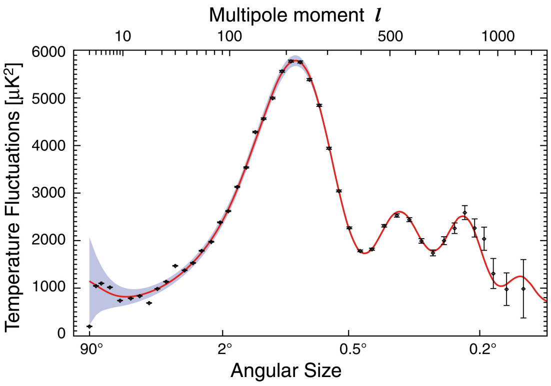


図 2.9　WMAP が観測した CMB のパワースペクトル。

・**Silk 減衰**：バリオン音響振動は宇宙が膨張して十分に冷え、光子がバリオンと相互作用しなくなる（**脱結合**する）と終了する。この脱結合の過程における光子とバリオンの相互作用により、ゆらぎは ℓ が大きい側で減衰する。

・**Sachs-Wolfe 効果**：出発点と到着点における重力ポテンシャルに違いがあると、光子は赤方/青方偏移する。また伝播途中におけるポテンシャルによって起こる SW 効果は、特に**積分 SW 効果（ISW 効果）**という：

- **初期 ISW 効果**……光子の脱結合時にはまだ完全に物質優勢にはなっておらず、僅かに残った輻射成分が重力ポテンシャルを変化させる。これが音地平線内に入るとゆらぎに影響を及ぼし、ISW 効果を生む。
- **後期 ISW 効果**……宇宙年齢がダークエネルギー優勢になると、宇宙の加速膨張によりポテンシャルは過去（遠方）に比べて浅くなり、地球に飛んでくる光子はエネルギーを逆に獲得する。

・CMB による宇宙論パラメータの制限：

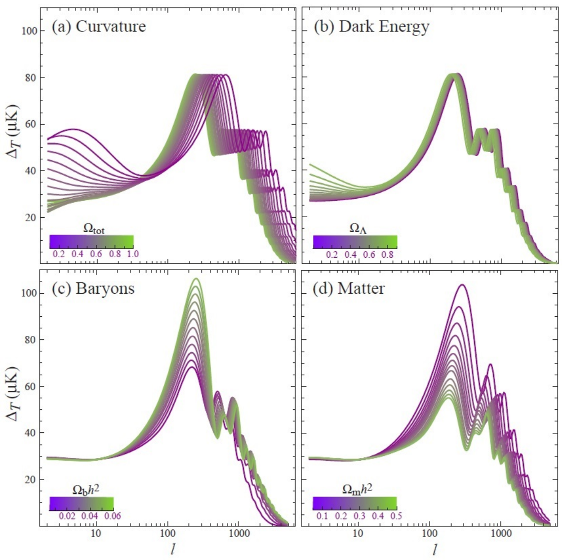


図 2.13　CMB の角度パワースペクトルの各宇宙論パラメータに対する依存性。$\Omega_{b,0}$ と $\Omega_{m,0}$ は互いにある程度独立に求めることができるが、$\Omega_{\Lambda,0}$ を制限しようとしても $\Omega_{m,0}$ が減少してしまうので、図 2.13 だけから $\Omega_{\Lambda,0}$ を制限することはできない（**パラメータ縮退**）。

2　宇宙マイクロ波背景輻射（続）

2.16　CMB の偏光

宇宙再結合前の CMB 光子は、電子による Thomson 散乱を受けていた。Thomson 散乱は**偏光**を生じさせるので、偏光している CMB 光子の存在が期待される。そこでこの節では、CMB の偏光成分に関する物理をまとめよう。

2.16.1　偏光の理論

電磁波は進行方向に垂直な平面内で振動する。一般にこの平面の位置は（電場成分と磁場成分が互いに直交してさえいれば）電磁波の好きに時間発展してよいのであるが、その平面が特定の方向だけを取るとき、その状態を偏光という。

まずは電磁波の進行方向を z 軸にとり、電場成分 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t)$ を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t) = (E_1\boldsymbol{e}_x + E_2\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \qquad \left(\begin{array}{l}\boldsymbol{e}_{x,y}\ \text{はそれぞれ}\ x,\ y\ \text{方向の単位} \\ \text{ベクトル},\ k\ \text{は波数},\ \omega\ \text{は周波数}\end{array}\right) \tag{a}$$

と書こう。この電場成分は z 軸に垂直かつ $E_1\boldsymbol{e}_x + E_2\boldsymbol{e}_y$ を通る（すなわち x 軸から角度 $\varphi = \cot(E_2/E_1)$ だけ傾いた）平面上で振動し、その振幅は $|\boldsymbol{E}| = \sqrt{{E_1}^2 + {E_2}^2}$ で与えられる。平面の位置を決める成分 $E_1,\ E_2$ はそれぞれ $E_i = a_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i}\ (i = 1,\ 2)$ と振幅・位相ごとに分解できて、その組み合わせ方で偏光のしかたが決まる。

(1) 直線偏光……$\delta_2 = \delta_1$ のとき、式 (a) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t) = (a_1\boldsymbol{e}_x + a_2\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$

となって、電場成分は $\varphi = \cot(E_2/E_1) = \cot(a_2/a_1)$ の平面内に留まったまま振動する。

(2) 円偏光……$\delta_2 = \delta_1 \pm \pi/2$ のとき、簡単のために $a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1} = a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1} \equiv E_0$ と仮定した上で式 (a) は

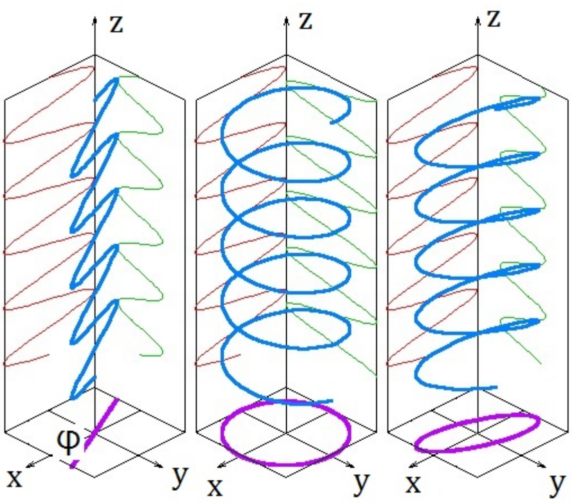
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t) = E_0(\boldsymbol{e}_x \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{b}$$

となり、（さらに E_0 を実数と思うと）この実部は

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{E} &= \mathrm{Re}\,E_0\begin{pmatrix}1\\ \pm\mathrm{i}\end{pmatrix}[\cos(kz-\omega t) + \mathrm{i}\sin(kz-\omega t)] \\ &= \mathrm{Re}\,E_0\begin{pmatrix}\cos(kz-\omega t) + \mathrm{i}\sin(kz-\omega t) \\ \pm\mathrm{i}\cos(kz-\omega t) \mp \sin(kz-\omega t)\end{pmatrix} = E_0\begin{pmatrix}\cos(kz-\omega t) \\ \mp\sin(kz-\omega t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられる。したがって偏光面は $\varphi = kz - \omega t$ であり、z 軸の周りを回転する。

(3) 楕円偏光……$\delta_1 \neq \delta_2$ のとき、一般に (2) の回転に合わせて振幅も伸び縮みする。



補足図 2.1　偏光の種類。左から直線偏光、円偏光、楕円偏光。青色の曲線は電磁波を、紫色の線は偏光面を表す。動画で見た方がずっと分かりやすい（例えば `https://www.youtube.com/watch?v=8YkfEft4p-w`）。

以下では簡単のために (2) の場合を考える。式 (b) の複号はそれぞれ偏光面の回転の向きを表し、$+$ ならば z 軸上方から見て左回り、$-$ ならば右回りに対応する。これらをそれぞれ**正のヘリシティ・不のヘリシティ**という。しかし式 (b) はそもそも、$\boldsymbol{e}_\pm \equiv (\boldsymbol{e}_x \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$ という新しい基底を用いて

$$\boldsymbol{E} = (E_+\boldsymbol{e}_+ + E_-\boldsymbol{e}_-)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{c}$$

と書いた方が簡単になる。これは

$$\boldsymbol{e}_x = \frac{\boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{e}_-}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \frac{\boldsymbol{e}_+ - \boldsymbol{e}_-}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}$$

より式 (b) が

$$\boldsymbol{E} = E_0(\boldsymbol{e}_x \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} = E_0\left(\frac{\boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{e}_-}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{e}_+ - \boldsymbol{e}_-}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$

と書けることを見れば納得できるだろう。

ここで式 (b) と (c) を眺めると、各偏光の振幅がそれぞれ

$$\begin{aligned}
&(x\text{ 方向の直線偏光の振幅}) &&= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_x, &&(y\text{ 方向の直線偏光の振幅}) &&= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_y;\\
&(\text{正のヘリシティの円偏光の振幅}) &&= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_+^*, &&(\text{負のヘリシティの円偏光の振幅}) &&= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_-^*
\end{aligned}$$

と与えられることに気がつく。そこで **Stokes パラメータ**という量を、$E_i = a_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i}$ $(i = 1,\ 2)$ を用いて

$$\begin{aligned}
I &\equiv |E_1|^2 + |E_2|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2, && \text{電磁波の強度}\\
Q &\equiv |E_1|^2 - |E_2|^2 = {a_1}^2 - {a_2}^2, && \text{偏光面の傾き (円偏光の場合は 0)}\\
U &\equiv 2\,\mathrm{Re}[E_1E_2^*] = 2a_1a_2\cos(\delta_1 - \delta_2), && \text{偏光面の傾き (円偏光の場合は 0)}\\
V &\equiv 2\,\mathrm{Im}[E_1E_2^*] = 2a_1a_2\sin(\delta_1 - \delta_2) && \text{楕円の歪み } (= |\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_+^*|^2 - |\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_-^*|^2)
\end{aligned} \tag{d}$$

によって導入しよう。これらは互いに独立でなく、定義から

$$I^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2)^2 = ({a_1}^2 - {a_2}^2)^2 + (2a_1a_2)^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

をみたす。

電磁波が完全に円偏光している場合 $Q = U = 0$ であるが、実際には完全に偏光している電磁波など存在せず、様々な振幅・位相・偏光状態の電磁波が重なり合っている。しかしそのような場合でも振幅たちの時間変動が ω よりも十分に小さければ、$\Delta t \sim 1/\omega$ の間は変動が無視できる。このように単一の ω で表現される電磁波を**単色光**、$\Delta t > 1/\omega$ となって振幅たちが変化し始めた電磁波を**準単色光**という。完全な単色光の場合の Stokes パラメータたちは式 (d) で与えられ $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ をみたすが、複数の ω が重なり合っているときは式 (d) を Δt に渡って時間平均した値を用いればよい。ただし後者の場合の Stokes パラメータは、等式ではなく

$$I^2 \geq U^2 + Q^2 + V^2$$

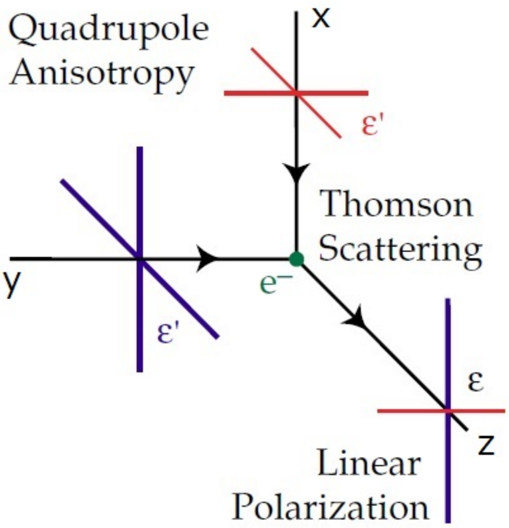
をみたすことに注意しよう。このとき、偏光の程度を表す量として

$$\Pi \equiv \frac{\sqrt{U^2 + Q^2 + V^2}}{I} \qquad (\Pi \leq 1)$$

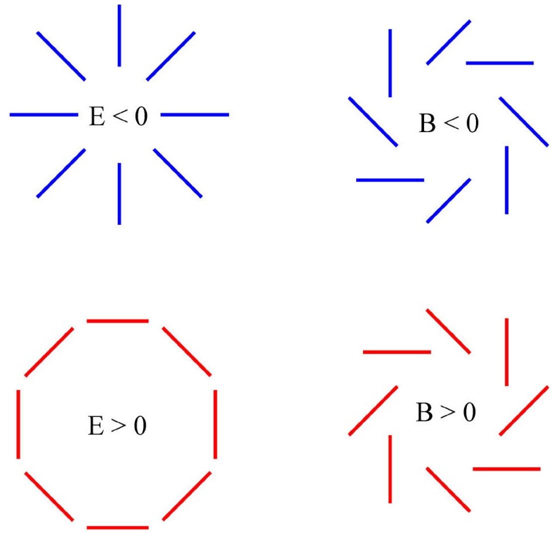
が定義できる。特に偏光していない電磁波に対しては $U = Q = V = 0$ なので、$\Pi = 0$ である。

2.16.2 Thomson 散乱における偏光

自由電子は CMB 光子を Thomson 散乱させ、非常に効率良く直線偏光を作り出す。例えば原点にいる自由電子に x 軸の先から CMB 光子（偏光は y, z 平面にそれぞれ平行）がやってきて z 軸方向に散乱されると、z 平面に平行な偏光は消去され、y 平面に平行な直線偏光だけが残る。とは言え実際は CMB の一様性のために偏光は互いに相殺して 0 になってしまうので、状況はここまで簡単ではない。



補足図 2.2　Thomson 散乱による直線偏光。x 軸と y 軸から入ってきた四重極子モーメントが z 軸方向に散乱されると、x 平面および y 平面に平行な直線偏光が生じる。



補足図 2.3　直線偏光の E-モード（左）と B-モード（右）。

しかし 2.1 節で見たように CMB の温度分布には微小なゆらぎが存在し、そのために x 軸の先から来る光子と y 軸の先から来る光子の強度は互いに少しだけ異なり、偏光が生じる。ただし温度ゆらぎが双極子モーメント $(\ell = 1)$ だと x 軸の正の側と負の側から来る光子の強度に差を作るだけで、偏光は生まれない。したがって、偏光の元になるのは温度ゆらぎの**四重極子モーメント** $(\ell = 2)$ である（補足図 1）。

直線偏光は、さらに **E-モード**と **B-モード**という 2 種類に分けられる：E-モードは偏光面が電磁波の進行方向に対して直交しているもの、B-モードは偏光面が 45° だけ傾いているものである。直線偏光を度合いを表す $(Q,\ U)$ は座標の取り方に依存していたので、回転角 φ を用いて

$$\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}$$

と変換する。すると $(E,\ B)$ は補足図 2 のように回転対称性をもつので、観測に適した量になるのである。ただし、前節まで（2.12 節など）で扱った自己重力による 線型 密度ゆらぎは E-モードしか生み出さないことが知られている。観測されている B-モード偏光は 非線型 の効果に由来するものであり、弱い重力レンズ効果と**初期重力波**がその代表例である。

直線偏光の観測は、密度ゆらぎや温度ゆらぎと同様にそのパワースペクトルを観測量として行えばよい。まずは準備として、密度ゆらぎ $\delta(\boldsymbol{r})$ に対するパワースペクトルの定義式[*1]

$$P(k) \equiv |\delta_k(k)|^2 = \int \delta(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \qquad (2.39,\ 2.40)$$

を 2 点間の相関関数 $\langle \delta(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r'}) \rangle$ に転用して

$$P(k) \equiv \int \langle \delta(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r'}) \rangle \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

と書き直す。ここで Dirac のデルタ関数 $\delta_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{r})$ の公式

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = (2\pi)^3 {\delta_{\mathrm{D}}}^3(\boldsymbol{r})$$

を用いて $\langle \delta(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r'}) \rangle$ を Fourier 変換すると、相関関数のパワースペクトルは結局

$$\langle \delta_k^*(\boldsymbol{k})\delta_k(\boldsymbol{k'}) \rangle = (2\pi)^3 {\delta_{\mathrm{D}}}^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')P(k)$$

をみたす。これを用いれば、E-モードと B-モードの角度パワースペクトル $C_\ell^{\mathrm{EE}},\ C_\ell^{\mathrm{BB}}$ をそれぞれ

[*1] 文脈の都合で係数の表現を多少変えているが、本質に影響はない。

$$\langle E^*(\boldsymbol{\ell})E(\boldsymbol{\ell}')\rangle = (2\pi)^2{\delta_{\mathrm{D}}}^2(\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{\ell}')C_\ell^{\mathrm{EE}}, \qquad \textbf{EE-モード}$$
$$\langle B^*(\boldsymbol{\ell})B(\boldsymbol{\ell}')\rangle = (2\pi)^2{\delta_{\mathrm{D}}}^2(\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{\ell}')C_\ell^{\mathrm{BB}} \qquad \textbf{BB-モード}$$

と定義できる。ただし $\boldsymbol{\ell} = (\theta_\ell,\ \phi_\ell)$ は天球上の温度ゆらぎに対する波数ベクトルであり、$2\pi\delta_{\mathrm{D}}$ の指数が 2 になっているのは C_ℓ が 2 次元上の角度パワースペクトルだからである。これらのパワースペクトルに加えて偏光・温度ゆらぎ間の<u>交差</u> スペクトルも定義することができて、温度ゆらぎの 2 次元 Fourier 成分を $T(\boldsymbol{\ell})$ としてそれぞれ

$$\langle E^*(\boldsymbol{\ell})B(\boldsymbol{\ell}')\rangle = (2\pi)^2{\delta_{\mathrm{D}}}^2(\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{\ell}')C_\ell^{\mathrm{EB}}, \qquad \textbf{EB-モード}$$
$$\langle T^*(\boldsymbol{\ell})T(\boldsymbol{\ell}')\rangle = (2\pi)^2{\delta_{\mathrm{D}}}^2(\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{\ell}')C_\ell^{\mathrm{TT}}, \qquad \textbf{TT-モード}$$
$$\langle T^*(\boldsymbol{\ell})E(\boldsymbol{\ell}')\rangle = (2\pi)^2{\delta_{\mathrm{D}}}^2(\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{\ell}')C_\ell^{\mathrm{TE}}, \qquad \textbf{TE-モード}$$
$$\langle T^*(\boldsymbol{\ell})B(\boldsymbol{\ell}')\rangle = (2\pi)^2{\delta_{\mathrm{D}}}^2(\boldsymbol{\ell}-\boldsymbol{\ell}')C_\ell^{\mathrm{TB}} \qquad \textbf{TB-モード}$$

となる。特に C_ℓ^{TT} は 2.10 節で登場した非偏光成分のパワースペクトルであり、また宇宙が全体として**パリティ不変**（空間座標の反転に関して対称）ならば $C_\ell^{\mathrm{EB}} = C_\ell^{\mathrm{TB}} = 0$ である。したがって、観測に用いられるのは通常の $C_\ell = C_\ell^{\mathrm{TT}}$ に $C_\ell^{\mathrm{EE}},\ C_\ell^{\mathrm{BB}},\ C_\ell^{\mathrm{TE}}$ の合わせて 4 つである（図 2.15）[*2]。

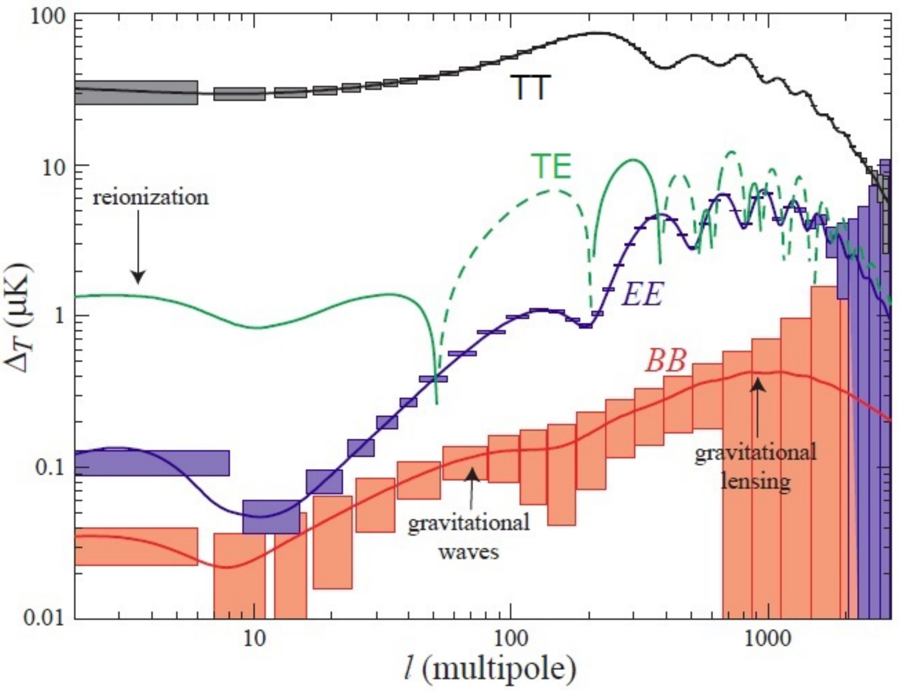


図 2.15　理論による 4 つの角度パワースペクトル $C_\ell^{\mathrm{TT}},\ C_\ell^{\mathrm{EE}},\ C_\ell^{\mathrm{BB}},\ C_\ell^{\mathrm{TE}}$（の絶対値）の再現。箱は 1σ の誤差を、点線部は絶対値をとる前の値が負だったことを表す。

B-モード偏光のうち初期重力波のために発生する成分を**重力波モード**といい、重力波モードは補足図 3 のようにさらに 3 通りに分類される。初期重力波はインフレーションのモデルに対して制限を与えるので、B-モードの検出はインフレーション理論の良い検証となってくれる。例えばスカラーモードとテンソルモードのパワースペクトル $C_\ell^{\mathrm{S}},\ C_\ell^{\mathrm{T}}$ がそれぞれ $C_\ell^{\mathrm{S}} \propto \ell^{n_{\mathrm{S}}-3},\ C_\ell^{\mathrm{T}} \propto \ell^{n_{\mathrm{T}}-3}$ と表されるとき（n_{S} はスペクトル指数；2.9 節)、各スペクトル指数は 2.8 節でも述べた

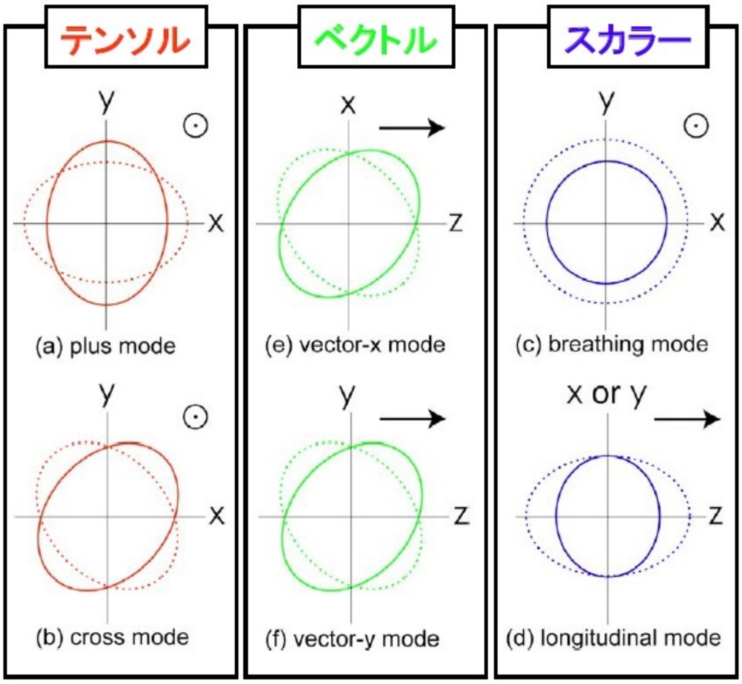
$$n_{\mathrm{S}} \simeq 1 - 6\varepsilon + 2\eta, \qquad n_{\mathrm{T}} \propto 1 - 2\varepsilon$$

に確かに一致する。また

$$\frac{C_\ell^{\mathrm{T}}}{C_\ell^{\mathrm{S}}} = 12.4\varepsilon \qquad \text{や} \qquad 0.0081 < 1 - n_{\mathrm{S}} < 0.00647$$

といった結果も得られている。

[*2] E-モードと B-モードはそれぞれ電場（**極性ベクトル**；空間反転に関して対称）・磁場（**軸性ベクトル**；同じく反対称）と同じ対称性をもつ。ゆえに名前に B が 1 つだけ含まれるモードのパワースペクトルは、反対称性より 0 になる。



補足図 2.4　重力波モードの分類。左から順にテンソルモード、ベクトルモード、スカラーモードという。各々はさらに 2 通りずつに分類される。

図 2.15 および図 2.16 を見ると分かるように、精度良く決められている偏光成分のパワースペクトルは TE-モードのみである。例えば BB モードは特に大きな不確かさをもつが、これは CMB の前景にある大規模構造による弱い重力レンズ効果に由来するもので、特に小スケール側 ($\ell \gtrsim 500$) で大きな不確かさにつながってしまう。

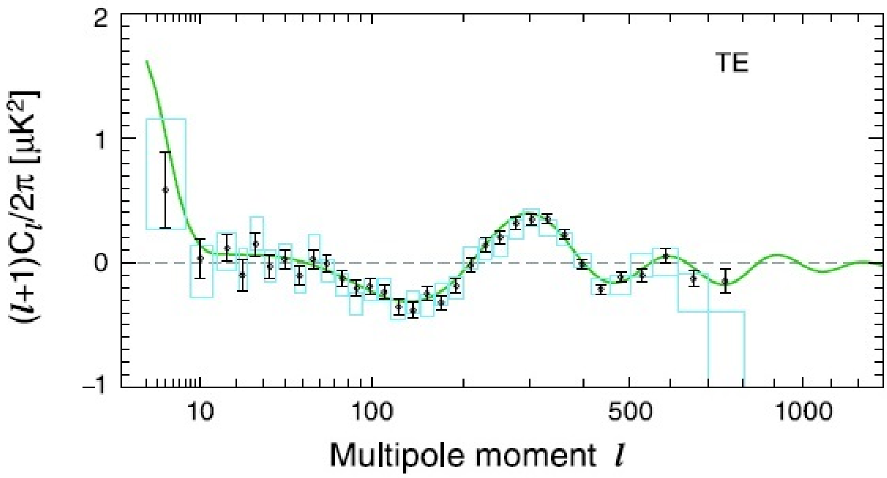


図 2.16　WMAP による C_ℓ^{TE} の観測結果。青色の箱は最初の 5 年間の観測結果、黒い点は 7 年間の観測結果、緑の曲線はデータ点をフィッティングしたもの。

2.17　ダークエネルギー

CMB とはあまり関係がないが、最後にダークエネルギーの話をしておこう。

2.17.1　ダークエネルギーと宇宙定数

一般相対論において重力場がみたす式は、**Einstein 方程式**：

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}}_{①} + \underbrace{\Lambda g_{\mu\nu}}_{②} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{③} \qquad \left(\begin{array}{l} R_{\mu\nu}\ \text{は Ricci テンソル},\ R\ \text{はスカラー曲率}, \\ g_{\mu\nu}\ \text{は計量},\ T_{\mu\nu}\ \text{はエネルギー・運動量テンソル} \end{array}\right)$$

で与えられる。①は時空の計量 $g_{\mu\nu}$ で表される量、③は物質の分布で表される量なので、この式は結局時空の幾何学と物質分布（物質場）の対応関係を決めていることになる。宇宙定数 Λ を含む残りの②は**宇宙項**と呼ばれ、宇宙膨張に対応する。しかし $\Lambda > 0$ を認めてしまうと、物質が存在しない (真空；$T_{\mu\nu} = 0$) ときの解が $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (Minkowski 時空) とはならず、何となく気持ちが悪い。そこで宇宙定数を右辺に移して、物質場の一部と見なそう：

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\tilde{T}_{\mu\nu} \qquad \left(\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}\right).$$

すると Λ はもはや時空の幾何学とは関係のない、ただの境界条件（初期条件）になってしまう。Λ を左辺と右辺のどちらに置くかは数学的にはただの移項にすぎないが、物理学的には「真空とは何か」という重要な問題に直結する。

ただし我々は 2.7-2.8 節でインフレーションを学んだとき、「どんな物質がインフレーションを引き起こすのか」という文脈で既に宇宙定数を物質場に入れていた。そこでここでも宇宙定数を物質場の一部と見なし、その “物質” がみたす性質を調べよう。議論の筋道自体は 2.7 節で辿ったものとまったく同じである。

いつものように Friedmann 方程式：

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}})G}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{1.8}$$

から出発する。まず式 (1.7) の両辺を Hubble パラメータ $H \equiv \dot{R}/R$ を用いて

$$H^2 = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \rho_\Lambda) \tag{2.61}$$

と書きたいが、右辺の第 2 項がこのように密度の和として表せるためには

$$\frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi\rho_\Lambda G}{3}, \qquad \therefore\ \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

であればよい。このときこれを式 (1.8) に代入すると、

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{8\pi\rho_\Lambda G}{3} = -\frac{4\pi G}{3}\left[(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \rho_\Lambda) + \frac{3}{c^2}(p_{\mathrm{m}} + p_{\mathrm{r}} + p_\Lambda)\right] \tag{2.62}$$

を得る。ただし圧力も和として表し、

$$p_\Lambda \equiv -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

とした。ここで状態方程式 $p_\Lambda = w_\Lambda \rho_\Lambda c^2$ を思い出すと、

$$-\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = p_\Lambda = w_\Lambda \rho_\Lambda c^2 = w \cdot \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

となるので、Λ に対応する “物質” は

$$w_\Lambda = -1, \qquad p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G} < 0$$

をみたし、Λ は宇宙膨張を支配する項であると言える。これは結局インフレーションのときと同じ解答ではあるが、そのスケールはインフレーションが $> 10^{12}$ TeV、宇宙定数は $\sim 10^{-3}$ eV と大きく離れている。

問 2.10　ダークマターとダークエネルギー（後述）の違いは何か？

解答

ダークマター	ダークエネルギー
重力でクラスタリングする（引力に支配される）	空間に遍く広がる（斥力の元になる）
圧力は 0	圧力は負
現在の全エネルギー密度の 22 % を占める	同じく 74 % を占める
再結合時の全エネルギー密度の 70 % を占めた	同じく無視できた

実際の観測における w_Λ に対する制限は、図 2.17 および図 2.18 のように得られている。

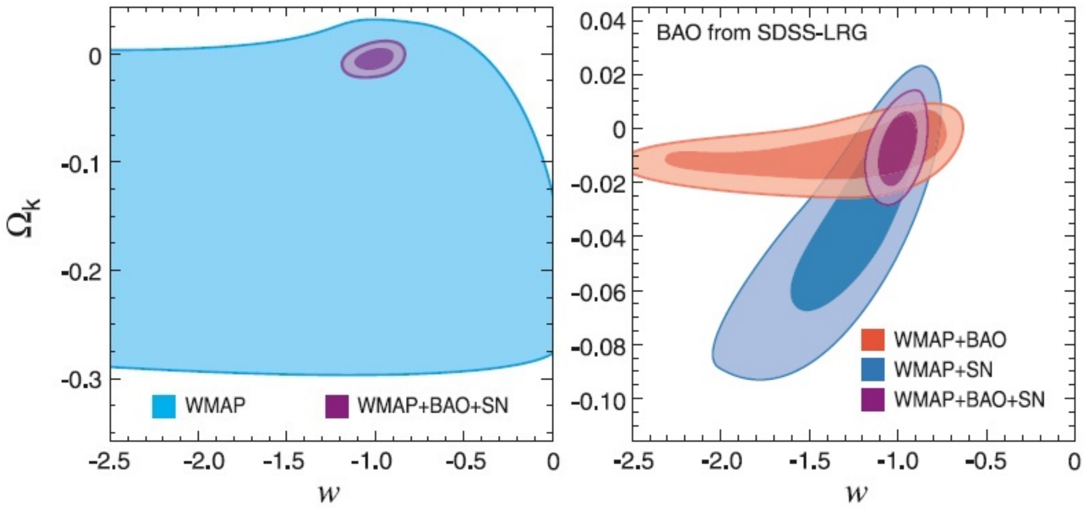


図 2.17　状態パラメータ w および密度パラメータ $\Omega_{k,0}$ に対する制限。色の濃いメッシュは 1σ、薄いメッシュは 2σ にそれぞれ対応する（図 2.18 も同様）。（左）WMAP 単独での制限はほぼ不可能だが、バリオン音響振動 (BAO) および超新星 (SN) を合わせると極めて強い制限ができる。（右）WMAP と Hubble 宇宙望遠鏡 (HST)・BAO・SN を合わせた制限。WMAP+BAO は Ω_k を、WMAP+SN は w をそれぞれ強く制限するので、WMAP+BAO+SN の組み合わせが必要である。どちらも複数の手段を同時に用いることで、パラメータ縮退（2.15 節）を解消している。

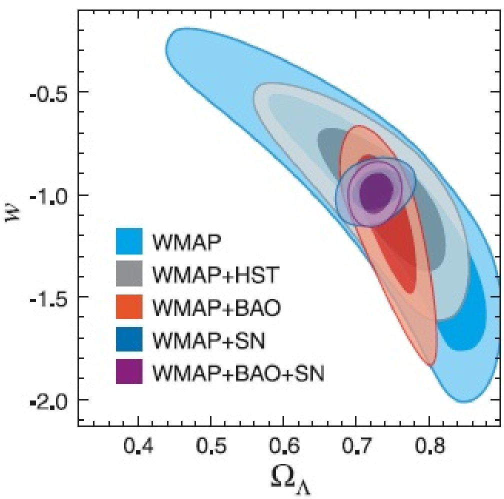


図 2.17　（続）$\Omega_{k,0} = 0$ のときの w, $\Omega_{\Lambda,0}$ に対する制限。複数の手段を用いることで強い制限が得られている。

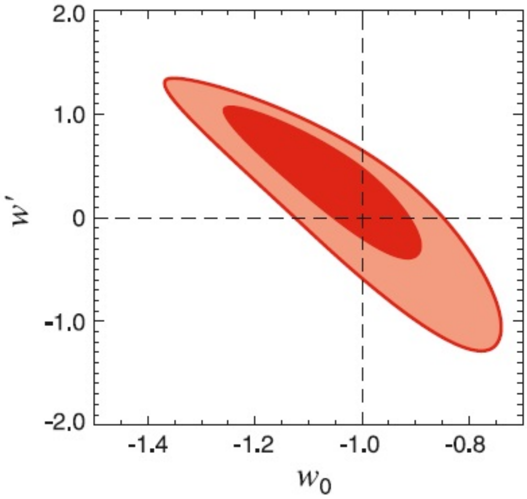


図 2.18　状態パラメータを $w = w_0 + w'z/(1+z)$ と書いたときの、w_0 と w' に対する制限。ただし $\Omega_{k,0} = 0$ を仮定し、WMAP+BAO+SN を用いた。

ところで Λ が物質場の一部であるならば、Λ はもはや宇宙 "定数" である必要はない。そこでより一般に、時刻に伴って変化するような Λ を**ダークエネルギー**ということにする。図 2.18 は w_Λ（以降は簡単のために w と書く）が時間発展するとして

$$w(z) = w_0 + \frac{z}{1+z} w'$$

と書いたときの w_0 と w' に対する制限を示している（特に $w' = 0$ で時間依存性はなし、さらに $w_0 = -1$ で ダークエネルギー = 宇宙定数Λ)。しかし、そもそも w が時間発展すると思う根拠はあるのだろうか？　これを考えるために、w に対応するスカラー場を ϕ_Λ、その有効ポテンシャルを $V_\Lambda(\phi_\Lambda)$ とおこう。するとインフラトン場（2.8 節）のときと同様に、これらは

$$\ddot{\phi}_\Lambda + 3H\dot{\phi}_\Lambda + c^2 V'_\Lambda(\phi_\Lambda) = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \dot{}\ \text{は時間微分},\ '\ \text{は}\ \phi_\Lambda \\ \text{微分; 式 (2.18) を参照} \end{array}\right)$$

をみたすことが示される。また圧力 p_{ϕ_Λ} と $\underline{\text{エネルギー}}$ 密度 ρ_{ϕ_Λ} も式 (2.21), (2.22) と同様に

$$p_{\phi_\Lambda} = K_\Lambda - V_\Lambda, \qquad \rho_{\phi_\Lambda} = K_\Lambda + V_\Lambda \qquad \left(\begin{array}{l} K_\Lambda \equiv \dot{\phi}_\Lambda^2/2c^2\ \text{を運動} \\ \text{エネルギーと見る} \end{array}\right)$$

も成立するので、$p_{\phi_\Lambda} = w\rho_{\phi_\Lambda}$ より

$$w = \frac{p_{\phi_\Lambda}}{\rho_{\phi_\Lambda}} = \frac{K_\Lambda - V_\Lambda}{K_\Lambda + V_\Lambda}$$

が得られる。これは一般に時間発展し、特に $K_\Lambda \ll V_\Lambda$ のとき $w \simeq -1$、すなわちダークエネルギー $\simeq \Lambda$ となる。

以上のように、ダークエネルギーを基本的な 4 つの力に次ぐ "第 5 の力" と考えるような考え方を **quintessence** *3ということがある。Quintessence の典型的なスケールは 10^{-33} eV である。

2.17.2　再び宇宙の運命

状態パラメータ w は、インフレーションが起きるための条件として $w < -1/3$ をみたすのであった（2.7 節)。今までの議論では $-1 \le w < -1/3$ の領域しか考えていなかったが、次は $w < -1$ の領域では何がどう変わるのかを見ていこう。

まず、断熱膨張するガスのエネルギー密度 ρ が

$$\rho \propto V^{-(1+w)} \propto \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+w)} \qquad \left(\begin{array}{l} V\ \text{は体積},\ R\ \text{は} \\ \text{スケール因子} \end{array}\right) \tag{$*$}$$

に従って変化したこと（2.7 節）を思い出そう。ここで

$$H^2 = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i \qquad (\rho_i = \rho_\mathrm{m},\ \rho_\mathrm{r},\ \rho_\Lambda) \tag{2.61}$$

の両辺を ${H_0}^2$ で割って式 $(*)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{{H_0}^2} &= \Omega_{k,0} + \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{\mathrm{crit},0}} && \boldsymbol{\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{3H^2},\ \rho_\mathrm{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}} \\ &= \Omega_{k,0} + \sum_i \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\mathrm{crit},0}} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+w_i)} && \boldsymbol{w_i}\ \textbf{はそれぞれの成分に対する状態パラメータ} \\ &= \Omega_{k,0} + \sum_i \Omega_{i,0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+w_i)} && \boldsymbol{\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_\mathrm{crit}}} \end{aligned} \tag{2.64}$$

を得る。したがってダークエネルギー優勢期 $\Omega_\Lambda \simeq 1$ には

$$\frac{H^2}{{H_0}^2} \simeq \Omega_{\Lambda,0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+w_\Lambda)} \tag{\#}$$

*3 Quintessence（「本質」）には「第5元素（エーテル）（古代ギリシャにおいて火・空気・水・土に次ぐとされた元素)」という意味がある。

となるので、ダークエネルギー $=\Lambda$ ($\Longleftrightarrow w_\Lambda=-1$) のとき H は定数になる。一方 $w_\Lambda<-1$ のときには H は $R\to+\infty$ で $+\infty$ に発散し、事象の地平線の共動大きさ d_E は

$$d_\mathrm{E}\equiv R_0\int_0^\infty \frac{c}{R(t')}\mathrm{d}t' \longrightarrow 0 \qquad\qquad \left(H\equiv\frac{\dot{R}}{R}\longrightarrow 0\right)$$

となって 0 に収束する。この点では宇宙膨張が他のすべての力の強さを上回り、いかなる構造もその形を保てず崩壊してしまう。これを**ビッグリップ (big rip)** という。ビッグリップが起こる時刻 $t=t_\mathrm{rip}$ は次のように計算できる：式 (#) を

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\Omega_{\Lambda,0}{H_0}^2a^{-3(1+w_\Lambda)},\qquad \therefore\ a^{(1+3w_\Lambda)/2}\dot{a}=H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} \qquad\qquad \left(a(t)\equiv\frac{R(t)}{R_0}\right)$$

と書き換えた上で t で積分すると、

$$\begin{cases}\text{左辺}: & \displaystyle\int a^{(1+3w_\Lambda)/2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int a^{(1+3w_\Lambda)/2}\mathrm{d}a=\frac{2}{3(1+w_\Lambda)}a^{3(1+w_\Lambda)/2},\\ \text{右辺}: & \displaystyle\int H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\ \mathrm{d}t=H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\ t+C \qquad\qquad (C\text{ は積分定数})\end{cases}$$

より $t=t_0$ (現在) で $a(t_0)=1$ として

$$\frac{3}{2}H_0(t-t_0)=\frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\ |1+w_\Lambda|}\left[1-a^{(1+3w_\Lambda)/2}\right]$$

を得る。したがってビッグリップ ($a\to+\infty$) は

$$t_\mathrm{rip}=t_0+\frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\ |1+w_\Lambda|}\ (<+\infty)$$

という有限の時刻で起こることが分かる[*4]。

2.17.3 再びインフレーション宇宙モデル

ここで少し 2.8 節のインフレーションの議論に戻ろう。インフレーションはインフラトン場 ϕ のもつ真空エネルギー $V(\phi)>0$ によって引き起こされ、粒子が真の真空 $V(\phi_0)=0$ に落ち着いたときに終了するのであった。しかしポテンシャルはそもそも始点と終点のエネルギー差によってのみ定義されるのだから、真の真空を $V(\phi_0)=0$ に固定する必要はない。そこで零点エネルギー $V(\phi_0)$ の別の取り方を考えよう。

- まず、真の真空は直感的に Planck スケールと関係があるだろう。そこで前小節で論じた Λ は使えないだろうか？

問 2.11 (1) Λ が Planck 長さ ℓ_Pl だけで書けると仮定して、その値を求めよ。
(2) 式 (1.17) に現在の値 $\Omega_{\Lambda,0}=0.74,\ H_0=72$ km/s/Mpc を適用して、その値を求めよ。

解答 (1) Friedmann 方程式：

$$H^2=\frac{8\pi G\rho}{3}+\frac{\Lambda c^2}{3}-\frac{kc^2}{R^2} \tag{1.14}$$

などを見ると Λ の次元が L^{-2} だと分かるので、仮定より

$$\Lambda\sim\frac{1}{{\ell_\mathrm{Pl}}^2}=\frac{1}{(1.6\times10^{-35}\ \mathrm{m})^2}\sim\underline{10^{69}\ /\mathrm{m}^2}. \qquad \blacksquare$$

(2) 密度パラメータ Ω_Λ が $\Omega_\Lambda\equiv\Lambda c^2/3H^2$ で定義されていたことを思い出すと、現在の値を元にして

$$\Lambda=\frac{3{H_0}^2}{c^2}\Omega_{\Lambda,0}=\frac{3\times(2.3\times10^{-18}\ /\mathrm{s})^2}{(3\times10^8\ \mathrm{m/s})^2}\times(0.74)\sim\underline{10^{-52}\ /\mathrm{m}^2}. \qquad \blacksquare$$

両者は 121 桁もずれている。要するに、零点エネルギーの定義に Λ はまったく使えない。

[*4] 例えば $w_\Lambda=-1.5$ のとき $t_\mathrm{rip}=21$ Gyr であり、その 10 億年前に銀河団が、6 千万年に銀河が、3 ヶ月前に太陽系が、30 分前に地球が、10^{-19} 秒前に原子が崩壊する。またこのとき、ダークエネルギー優勢期は現在から 70 億年近く続くことになる。

- そこで次に、量子論からの類推に頼ることにする。真の真空における各粒子が調和振動子の零点エネルギー

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

をもつと仮定し、それを単位体積あたりで足し上げて

$$u_0 = \frac{1}{2}\hbar\sum_i \omega_i \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \frac{1}{2}\hbar\int\frac{\omega(k)}{(2\pi)^3}\mathrm{d}k$$

を真の真空のエネルギー密度とする。しかしこの類推は $\lambda \to 0$ でしか成り立たず、その例として $\lambda \sim \ell_{\mathrm{Pl}}$ をとると

$$u_0 \sim \frac{(1/2)hc/\lambda}{V} \sim \frac{0.5\times(6.6\times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s})\times(3\times 10^8\ \mathrm{m/s})/(1.6\times 10^{-35}\ \mathrm{m})}{4.2\times 10^{80}\ \mathrm{m}^3} \sim 10^{-71}\ \mathrm{J/m^3}$$

となる（V は観測可能な宇宙 (半径 $= 3.53c/H_0$; 1.9 節) の共動体積とした)。一方で観測値は

$$\rho_\Lambda c^2 \equiv \rho_{\mathrm{crit},0}\Omega_{\Lambda,0}\times c^2 = (9.3\times 10^{-27}\ \mathrm{kg/m^3})\times(0.74)\times(3\times 10^8\ \mathrm{m/s})^2 \sim 10^{-9}\ \mathrm{J/m^3}$$

となり、両者は 80 桁もずれてしまう。したがって、この案も上手くいかない。

ここまで来ると、本来量子重力理論を避けんがために導入したインフレーション宇宙モデルでも結局 Planck スケールの議論は避けられないはずだったのに（2.9 節)、Planck スケールの議論が観測値に掠りすらしていないことが分かる。この問題は宇宙の真空エネルギー（すなわち宇宙定数 Λ）の起源と合わせて、未だ解決されていない。

〈第 2 章の参考文献〉

- 佐藤勝彦 & 二間瀬敏史他 2007, 『宇宙論』(「シリーズ現代の天文学」第 3-4 巻）, 日本評論社
- 松原隆彦 2010, 『現代宇宙論　時空と物質の共進化』, 東京大学出版会
- S. ワインバーグ著, 小松英一郎訳 2013, 『ワインバーグの宇宙論』(上・下）, 日本評論社

〈今回のまとめ〉

・**偏光**：電磁波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\ t) = (E_1 \boldsymbol{e}_x + E_2 \boldsymbol{e}_y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ において $E_i = a_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i}$ $(i = 1,\ 2)$ と分解するとき、$\delta_2 = \delta_1$ だと**直線偏光**、$\delta_1 \neq \delta_2$ だと**楕円偏光**、特に $\delta_2 = \delta_1 \pm \pi/2$ だと**円偏光**。

・**Stokes パラメータ**：

$$I \equiv |E_1|^2 + |E_2|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2, \qquad Q \equiv |E_1|^2 - |E_2|^2 = {a_1}^2 - {a_2}^2,$$
$$U \equiv 2\,\mathrm{Re}[E_1 E_2^*] = 2a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2), \qquad V \equiv 2\,\mathrm{Im}[E_1 E_2^*] = 2a_1 a_2 \sin(\delta_1 - \delta_2).$$

これらは $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ をみたす。

・Thomson 散乱における偏光：自由電子は CMB 光子を Thomson 散乱させ、非常に効率良く直線偏光を作り出す。直線偏光は $\boldsymbol{E}$**-モード**と $\boldsymbol{B}$**-モード**に分けられ、温度ゆらぎも合わせてさらに **EE-モード** (パワースペクトル C_ℓ^{EE})、**BB-モード** (C_ℓ^{BB})、**TT-モード** (C_ℓ^{TT})、**TE-モード** (C_ℓ^{TE}) に分けられる（他のモードのスペクトルは 0)。

E-モードの偏光は線型密度ゆらぎに、B-モードの偏光は弱い重力レンズ効果や**初期重力波**といった非線型の効果に由来する。

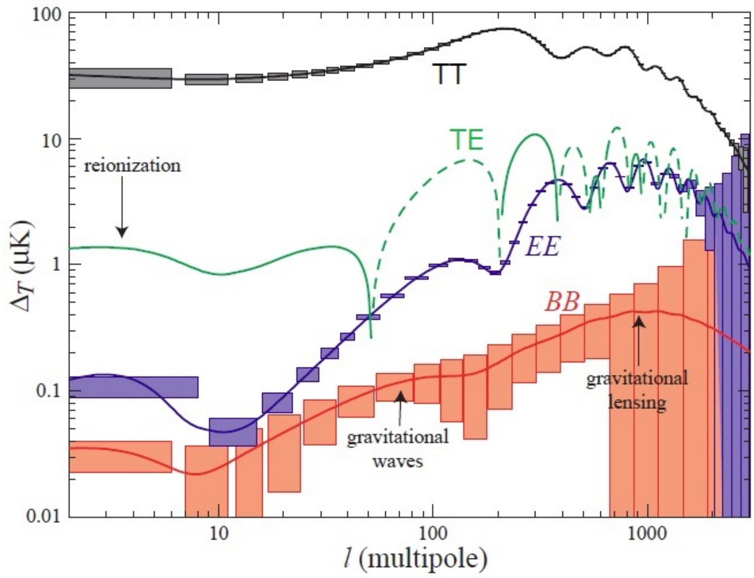


図 2.15　4 つの角度パワースペクトル $C_\ell^{\mathrm{TT}},\ C_\ell^{\mathrm{EE}},\ C_\ell^{\mathrm{BB}},\ C_\ell^{\mathrm{TE}}$。

・ダークエネルギー：Einstein 方程式を

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu} \qquad \left(\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right)$$

と書いて宇宙定数 Λ を物質場の一部と見なすとき、Λ の状態方程式は $w_\Lambda = -1$ をみたす。

さらに Λ が物質場の一部であるならば、もはや定数である必要はない。より一般に、時刻に伴って変化するような Λ を**ダークエネルギー**という。

・宇宙の運命：ダークエネルギー優勢期 $\Omega_\Lambda \simeq 1$ には

$$\frac{H^2}{{H_0}^2} \simeq \Omega_{\Lambda,0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+w_\Lambda)}$$

となるので、$w_\Lambda < -1$ のときには H は $+\infty$ に発散し、事象の地平線の共動大きさ d_{E} は 0 に収束する。このとき宇宙膨張が他のすべての力の強さを上回り、いかなる構造もその形を保てず崩壊してしまう（**ビッグリップ**）。ビッグリップが起こる時刻 $t = t_{\mathrm{rip}}$ は

$$t_{\mathrm{rip}} = t_0 + \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\ |1 + w_\Lambda|}.$$

〈単語リスト〉

p.86

- postulate「〜を要求する；主張する；前提とする」

p.87

- rip (v.)「裂ける；〜を引き裂く」 (n.)「裂け目」

p.88

- punt on「〜を諦める」