

## 〈前回の復習〉

- ・形態-密度関係：楕円銀河は銀河団の中に、S0 銀河と渦巻銀河は銀河団の外に見られる。
- ・銀河形成モデル：
  - 一枚岩の崩壊モデル—宇宙初期に爆発的星形成 (starburst)→ その後に受動的恒星進化
  - 階層構造形成モデル—一個一個形成される
- ・Jeans 質量：銀河が重力崩壊する条件は

$$M > M_J \equiv \left( \frac{5k_B T}{G m_p} \right)^{3/2} \left( \frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.7)$$

- ・Butcher-Oemler 効果：遠くにある銀河団のコアには、近傍宇宙にある銀河団のコアよりも青い星が多い。つまり高  $z$  では現在よりも頻繁に星形成が行われていたらしい。
- ・冷却流問題：高密度コアでは冷却が速い。ガスが冷却されると、外側にあるガスを圧力で支えられなくなるのでガスは圧縮され、冷却時間はさらに短くなる。この暴走的な冷却を冷却流 (cooling flow) という。しかし実際の観測では見つからず、理由もよく分かっていない。
- ・距離指標：光度が分かっている標準光源と、大きさが分かっている標準ものさしに分かれており、前者からは光度距離  $d_L$  が、後者からは角径距離  $d_A$  が求められる。
- ・宇宙の距離はしご：距離指標を、銀河系に近い方から登っていく。
  - 銀河系—近くには大小マゼラン雲をはじめとする伴銀河たち
  - 局所銀河群—銀河系とアンドロメダ銀河など、40 個を超える銀河の集団
  - 銀河団—総質量が  $\sim 10^{14} M_\odot$  を超えると呼ばれる。もっとも近い銀河団はおとめ座銀河団
  - おとめ座超銀河団 (局部超銀河団)—局部銀河群やおとめ座銀河団が属している
  - 宇宙の大規模構造 (宇宙の泡構造)—銀河団たちが集まっているフィラメント (グレート・ウォール) と、ほとんど何もない超空洞 (ヴォイド) が網の目状に並んでいる
- ・赤方偏移空間の歪み：神の指と Kaiser 効果。特異速度により、元の赤方偏移に Doppler 効果が加わる。
- ・相関関数：銀河の分布を無作為な分布と比較したときの偏り：

$$d^2 \text{Pr}(\mathbf{r}) = [1 + \xi(\mathbf{r})] n^2 dV_1 dV_2. \quad (3.9)$$

距離が分からないときは角度相関関数

$$d^2 \text{Pr}(\theta) = [1 + w(\theta)] n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (3.13)$$

を使う。 $w(\theta)$  と  $\xi(r)$  は Limber の公式で関係している。また  $\xi(r)$  と銀河のパワースペクトル  $P(k) \equiv \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$  ( $\delta_{\mathbf{k}} \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$ ) は互いに Fourier 変換の関係にある：

$$\xi(r) = \frac{V}{2\pi^2} \int P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} k^2 dk, \quad (3.11)$$

$$P(k) = 4\pi V \int \xi(r) \frac{\sin(kr)}{kr} r^2 dr. \quad (3.12)$$

- ・キューサー：銀河の中心にある超巨大ブラックホールであり、質量降着によってなんとその銀河全体よりも明るく輝いている。キューサーのクラスターリングはダークハローの性質を反映している：

$$\left( \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \right)_{\text{キューサー}} = b \left( \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \right)_{\text{ダークマター}} \quad (b \text{ はバイアス・パラメータ}) \quad (3.16)$$

- ・バリオン wiggle (BAO)：音響ピークの生き残り。CMB にまで届く標準ものさしとして利用できる。

我々はすぐ近くの世代より、遠く離れた世代により親しみを感ずるものだ。

Igor Stravinsky (ロシアの作曲家)

## 4 可視光で見る遠方宇宙

近年、ビッグバンの時代まで遡れるような高性能の望遠鏡が建設されている。この章では、そのような光学望遠鏡のおかげで分かってきた銀河の進化を辿っていこう。

### 4.1 再び number counts

1.2 節で、単位光度あたりにある銀河の個数が  $dN/dS \propto S^{-5/2}$  で与えられることを学んだ。これを 1.2 節より簡単な方法で導いてみよう。

今度はフラックスが  $S$  よりも大きい 銀河の個数を

$$N(> S) \equiv \int_S^\infty \frac{dN}{dS} dS$$

と書き、**積分 number counts** と呼ぶことにする。この文脈では、 $dN/dS$  は**微分 number counts** と呼ぶ。ここですべての銀河の光度は  $L$  で共通であり、個数密度  $\rho$  も一定とする。このとき  $N(> S)$  は半径  $r = (L/4\pi S)^{1/2} \propto S^{-1/2}$  よりも内側にある銀河の個数に等しいので、

$$N(> S) = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \propto r^3 \propto S^{-3/2}$$

である。これを微分することで

$$\frac{dN}{dS} \propto S^{-5/2}$$

を得る\*1。後は 1.2 節と同様に  $i$  番目のグループの個数密度を  $\rho_i$ 、光度を  $L_i$  とすると ( $i = 1, 2, \dots$ )、それぞれのグループで  $dN_i/dS = k_i S^{-5/2}$  ( $k_i$  は比例定数) なので、全体でも

$$\frac{dN}{dS} = \sum_i \frac{dN_i}{dS} = \sum_i k_i S^{-5/2} = S^{-5/2} \sum_i k_i \propto S^{-5/2}$$

となって同じ冪乗則に従う。以上の議論が初めて登場したのは、1767 年と非常に古い。

一方で 1970 年代初頭、B バンドにおける銀河の  $dN/dS$  が  $\Omega_m$  の値に関わらず銀河の分布に一致 しない という事実が明らかになった (当時は当然  $\Lambda = 0$  であり、銀河の分布は進化しないと思われていた)。要するに暗く青い銀河の数が予想よりも多かったのであり、これは暗い青色銀河問題として捉えられるようになった。その後銀河の光度が進化することが分かったが、それでも問題を完全に解決できた訳ではなかった。そこで次の一手として、最近になって形成された矮小銀河の分布が挙げられ、その理論的再現が模索されることになった。

その流れを変えたのは精密宇宙論 (precision cosmology) \*2 と、

$$\Omega_{m,0} h^2 = 0.1326 \pm 0.0063, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030 \quad (h = 0.72 \pm 0.03)$$

なるモデルの確立であった。膨張する宇宙 ( $\Omega_\Lambda > 0$  すなわち  $\Lambda > 0$ ) では、膨張しない宇宙 ( $\Lambda = 0$ ) よりも高  $z$  で時間と空間が大きくなる。すると B バンドの暗い側での銀河の個数がより多くなり、暗い青色銀河問題の大部分が解決されることになった。要するに可視光 (や電波) での number counts の  $\propto S^{-5/2}$  からのずれは、人類が宇宙は平坦でも定常でもないことに初めて気がつくきっかけになった訳である。

\*1 1.2 節では「 $dN/dS$  は単位光度あたりの銀河の個数であって微分ではない」と注意書きがあったが、この節では微分と見なしているようだ。

\*2 精密科学としての宇宙論。

## 4.2 冷たいダークマターと構造形成

“冷たいダークマター” という言い方がある。ダークマターがなぜこのように呼ばれているかを考えるには、ダークマターが他の物質と相互作用をしなくなったとき（要するに宇宙の晴れ上がりのとき）を考えるとよい。このときにもしダークマターが相対論的であったならば、ダークマター粒子の平均エネルギーがボソンで  $\langle E \rangle = 2.7k_B T$ 、フェルミオンで  $\langle E \rangle = 3.1k_B T$  であったはずである。また平均運動量  $\langle |p| \rangle$  は  $\langle E \rangle = \langle |p| \rangle c$  をみたす。その後宇宙膨張に伴って運動量は非相対論的 ( $\langle |p| \rangle = m \langle |v| \rangle$ ) になるまで減っていくが、運動量の分布自身は変化しないので、結局

$$\langle E \rangle = \langle |p| \rangle c = m |v| c \quad (m \text{ は粒子の質量})$$

が成立する。すると現在の背景ニュートリノの温度 (1.95 K) をこの式に適用することで、現在のニュートリノの速さを  $|v| = 159(mc^2/\text{eV})^{-1} \text{ km/s}$  と計算できる。一方で晴れ上がりのときにダークマター粒子が非相対論的であったならば、この速さはどこまでも遅くなる。そこで相対論的であった前者を熱いダークマター (**Hot Dark Matter: HDM**)、非相対論的であった後者を冷たいダークマター (**Cold Dark Matter: CDM**) と呼ぶ。観測結果に合っているのは CDM の方であるが、妥協案として温かいダークマターや混合ダークマターといったものも考えられている。

物質のパワースペクトルは、インフレーションのゆらぎに由来するいくつかの効果によって曲げられる (図 4.1)。例えば物質 = 輻射 になるよりも以前に物質の密度ゆらぎの Fourier モードが地平線に呑み込まれたとする。すると輻射のエネルギーが宇宙を急速に膨張させて物質は重力でまとまる暇がなくなり、Fourier モードは定数のまま固定される。これを **Mészáros 効果** という。パワースペクトルを曲げるもう一つの例が HDM であり、これは非相対論的になるまで高速で動き回り、初期宇宙の小規模構造を消してしまう。しかし HDM では銀河の大規模なパワースペクトルを再現することはできず、3.1 節で紹介した

$$\Omega_\nu h^2 \simeq \frac{\sum m_i}{93.5 \text{ eV}} < 0.0076$$

という制限も、HDM を用いて得られた訳ではない (実際に使われたのは宇宙の大規模構造である)。

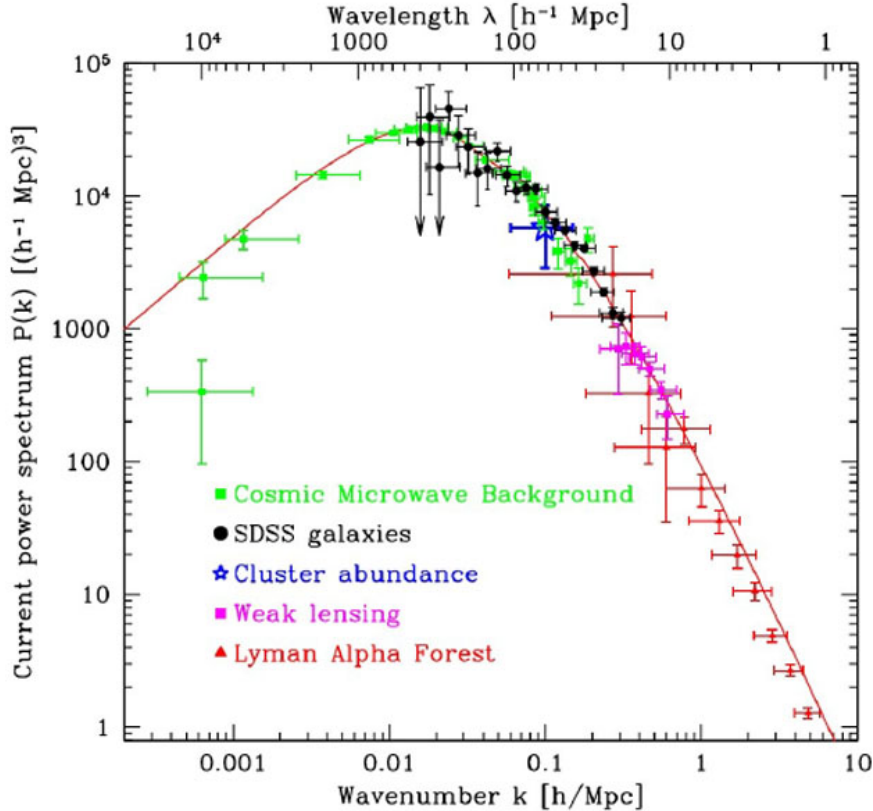


図 4.1 物質のパワースペクトル。

宇宙の大規模構造は、ビリアル平衡にある小さなダークハローが合体して大きなダークハローを形成することで作られる (図 4.2)。このボトムアップな構造形成を階層的構造形成という (その逆は、HDM が小規模構造を消していくトップダウンな形成)。ただしこれはあくまでもダークマターの話であり、バリオンは関係ないことに注意しよう。物質のゆらぎはバリオンと光子の相互作用 (Thomson 散乱) によって進化する。

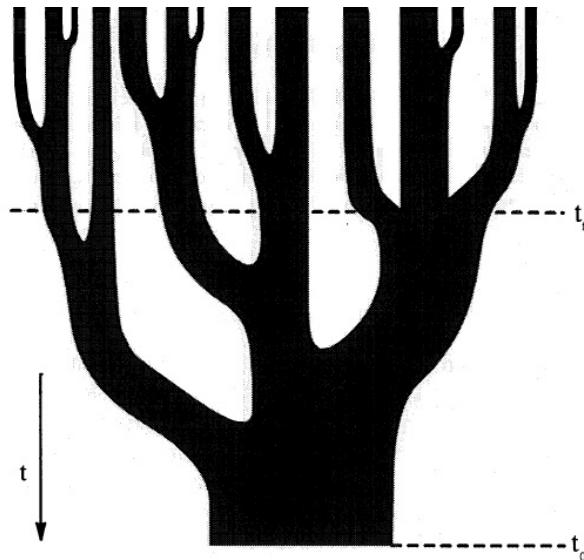


図 4.2 ダークハロー進化の模式図。下に行くほど現在に近い。

密度ゆらぎの進化は、時空の曲率が RW 計量を歪ませる効果を考えると非常に複雑になる。しかし例えば平坦かつ  $\Lambda = 0$  の宇宙においては、非相対論的な運動を仮定すれば過密領域の崩壊は比較的簡単に計算できる。この領域が球対称であり、ゆえに閉じた一様宇宙と同一に扱えるとして、次の問題を解いてみよう。

問 4.1 (1) 宇宙が膨張せず ( $\Lambda = 0$ ) かつ閉じている ( $k = +1$ ) とき、Friedmann 方程式 (1.7) が

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = R_{\max}R - R^2 \quad (4.1)$$

と書けることを示せ。ただし  $R_{\max}$  は  $dR/dt = 0$  のときの  $R$  とし、 $\theta$  は  $dt/d\theta = R/c$  をみたすとする。

(2) 式 (4.1) の解が

$$R(\theta) = \frac{R_{\max}}{2}(1 - \cos \theta), \quad (4.2)$$

$$t(\theta) = \frac{R_{\max}}{2c}(\theta - \sin \theta) \quad (4.3)$$

で与えられることを示せ。

解答 (1) Friedmann 方程式

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} \quad (\rho \equiv \rho_m + \rho_r) \quad (1.7)$$

において  $\Lambda = 0$  かつ  $k = +1$  とし、

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$$

を用いると

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - c^2$$

を得る。ここで  $dR/dt = 0$  のとき

$$0 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R_{\max}} - c^2, \quad \therefore \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3} = R_{\max}c^2 \quad (*)$$

なので、これを上の式に戻して

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{R_{\max}}{R}c^2 - c^2$$

となる。最後に  $dt/d\theta = R/c$  を用いると、

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 \frac{c^2}{R^2} = \frac{R_{\max}}{R}c^2 - c^2$$

より

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = R_{\max}R - R^2 \quad (4.1)$$

を得る。■

(2) 式 (4.1) を

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + R^2 = R_{\max}R$$

と変形すると、これはパラメータ  $\phi = \phi(\theta)$  を用いて形式的に

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = R_{\max}R \cos^2 \phi, \quad R^2 = R_{\max}R \sin^2 \phi$$

と書ける。後者から直ちに

$$R = R_{\max} \sin^2 \phi \quad (\#)$$

が分かるので、これを前者に代入して

$$\left(R_{\max} \cdot 2 \sin \phi \cos \phi \frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 = R_{\max}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi, \quad \therefore \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{4}$$

を得る。これを積分するのだが、 $\phi$  には定数の分だけ不定性があるので積分定数は 0 と取る。すると

$$\phi = \frac{\theta}{2}$$

なので、これを式 (#) に戻すと

$$R(\theta) = R_{\max} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{R_{\max}}{2}(1 - \cos \theta) \quad (4.2)$$

となる。また

$$\frac{dt}{d\theta} \equiv \frac{R}{c} = \frac{R_{\max}}{2c}(1 - \cos \theta)$$

なので、両辺を積分して

$$t(\theta) = \frac{R_{\max}}{2c}(\theta - \sin \theta) \quad (4.2)$$

を得る。ただし  $\theta$  も定義に定数の分だけ不定性があるので、 $R(t=0) = 0$  で  $\theta = 0$  になるように選んだ。この解はなんとサイクロイドの形をしている！■

この問題から分かることをまとめてみよう。

- 今回 ( $k = +1$ ) は  $R_{\max} = 8\pi G\rho_0 R_0^3/3c^2$  であったが、宇宙が平坦な場合 ( $k = 0$ ) の  $R$  は単に

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \quad \therefore R^3 = \frac{3M}{4\pi\rho} \quad (4.4)$$

で決まる。質量は保存されるので、現在の値  $R_0^3 = 3M/4\pi\rho_0$  を式に代入すると、

$$R_{\max} = \frac{9\pi G\rho_0}{3c^2} R_0^3 = \frac{9\pi G\rho_0}{3c^2} \frac{3M}{4\pi\rho_0} = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.5)$$

を得る\*3。

- 宇宙 ( $R(\theta)$ ) は  $\theta = 0$  で始まって膨張し、 $\theta = \pi$  で収縮に転じ (**turn-around time**)、 $\theta = 2\pi$  で 1 点に潰れる。

\*3 これは Schwarzschild 半径と一致しているが、偶然である。そもそも今計算しているのは RW 計量であり、Schwarzschild 計量ではない。

- この解答から  $R(t)$  を解析的に求めることはできないが、密度のゆらぎは計算できる。まず式 (4.4) と (4.5) より

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3R_{\max}c^2}{8\pi GR(\theta)^3} \quad (4.6)$$

である。一方式 (1.15) の現在の形

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \quad (\rho = \rho_m \text{と見なした}) \quad (1.15)$$

で  $\Omega_{m,0} = 1$  とし、問 1.4 と問 1.5 (Einstein-de Sitter 宇宙) の結果

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (\Omega_m = 1, \Lambda = 0 \text{ のとき}) \quad (1.35)$$

を代入すると、周囲の密度として

$$1 = \frac{8\pi G\rho_0}{3(2/3H_0)^2} = 6\pi G\rho_0 t_0^2 = 6\pi G \underbrace{\rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3}_{=\rho} t^2 = 6\pi G\rho t^2, \quad \therefore \rho = \rho_{\text{EdS}} \equiv \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (4.7)$$

を得る。式 (4.6) と (4.7) の比をとると

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} = \frac{3R_{\max}c^2/8\pi GR(\theta)^3}{1/6\pi G t^2} = \frac{9R_{\max}c^2}{4} \frac{t(\theta)^2}{R(\theta)^3} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3}$$

であるが、これは  $\theta = 0$  を特異点にもつのでその周りでテイラー展開する：

$$\frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \simeq \frac{2}{9} + \frac{1}{30}\theta^2 + \dots$$

すると

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} \simeq \frac{9}{2} \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{30}\theta^2 + \dots \right) = 1 + \frac{3}{20}\theta^2 + \dots$$

であるが、同様に式 (4.3) を

$$t(\theta) \simeq \frac{R_{\max}}{2c} \frac{\theta^3}{6} + \dots, \quad \therefore \theta \simeq \left( \frac{12ct}{R_{\max}} \right)^{1/3} + \dots$$

とテイラー展開して上の式に代入すると

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} \simeq 1 + \frac{3}{20} \left( \frac{12ct}{R_{\max}} \right)^{2/3}$$

を得る。ゆえに密度のゆらぎ (1 からの超過分)  $\delta$  は

$$\delta \simeq \frac{3}{20} \left( \frac{12c}{R_{\max}} \right)^{2/3} t^{2/3} \propto t^{2/3} \propto a \quad \left( a \equiv \frac{R}{R_0} \right) \quad (4.8)$$

となる。ただし最後に式 (1.35) を用いた。以上の計算を (高次の  $\theta$  が使われているのにも関わらず)、線形理論近似という。

- turn-around time:  $\theta = \pi$  すなわち  $t = \pi R_{\max}/2c$  まで進むと、線形理論近似は破綻する。具体的には turn-around のときの密度が  $\rho = 3M/4\pi R_{\max}^3$  で与えられるので、密度の比は

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} = \frac{3M/4\pi R_{\max}^3}{1/6\pi G t^2} = \frac{9MG}{2R_{\max}^3} t^2 = \frac{9MG}{2R_{\max}^3} \left( \frac{\pi R_{\max}}{2c} \right)^2 = \frac{9\pi^2}{8c^2} \frac{MG}{R_{\max}} = \frac{9}{16} \pi^2 = 5.55$$

となり、ゆえにゆらぎは  $\delta = 4.55$  となる。一方式 (4.8) では  $\delta = (3/20)(6\pi)^{2/3} = 1.06$  となり、確かに近似は成り立っていない。

- $\theta = 2\pi$  のとき、宇宙の密度は正の無限大に発散する（線形理論近似は当然成り立たない）。しかし  $\theta = 2\pi$  の近くではビリアル化が起こると考えられており、その下では密度ゆらぎは安定に存在し得る。このときの密度を計算してみよう。以降、ビリアル平衡下にある量を添字 V で表す。turn-around における運動エネルギーとポテンシャル  $E_{K,V}$ ,  $E_{GR,V}$  はビリアル定理  $E_{K,V} = -E_{GR,V}/2$  に従うので、全エネルギー  $E$  は

$$E = E_{K,V} + E_{GR,V} = \frac{E_{GR,V}}{2}$$

で与えられる。一方 turn-around のときには運動エネルギーが存在しないので、 $E$  はポテンシャルに等しい：

$$E = E_{GR}.$$

ここで式 (3.6) より

$$E_{GR} = -\frac{3}{5} \frac{GM}{R_{\max}} \propto \frac{1}{R_{\max}}$$

であったことを思い出すと、結局  $R_V = R_{\max}/2$  を得る。したがって turn-around での密度の関係は  $\rho_V = 8\rho_{\max}$  となる。また  $\theta = 0$  から  $\theta = 2\pi$  までにかかる時間は  $\theta = \pi$  までにかかる時間の 2 倍なので、式 (4.7) より  $\theta = 2\pi$  での周辺の密度は

$$\rho(\theta = 2\pi) = 4\rho(\theta = \pi) = 8 \times 4\rho_V(\theta = \pi)$$

となる。図 4.4 には、ここまでに見てきた密度ゆらぎが崩壊する様子を示した。

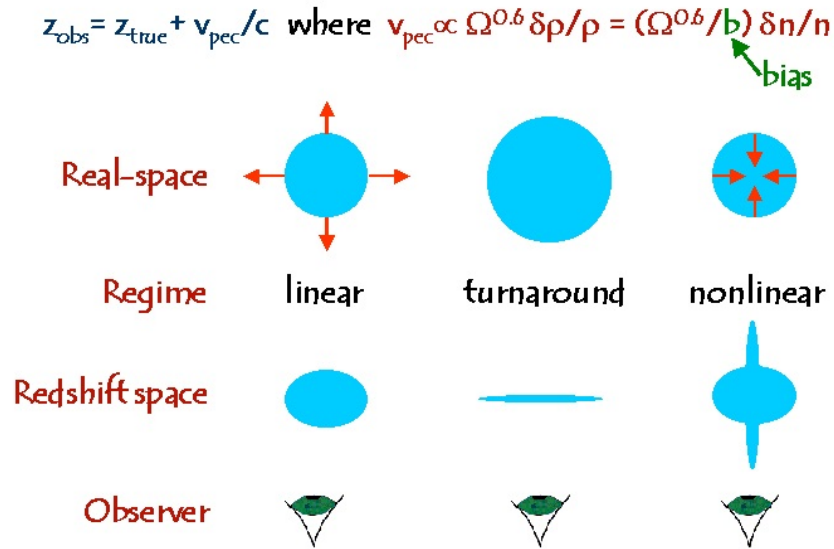


図 4.3 密度ゆらぎが崩壊する様子。実空間と赤方偏移空間では見え方が異なる。

以上の議論（問 4.1 のはじめから）は密度ゆらぎの球対称性を仮定していたが、実際の分布は非対称的である。このときには  $N$  体シミュレーションを用いた数値計算に頼らざるを得ない。しかし計算でも分かることはまだある—特に今までは  $\Omega_m = 1$  を仮定していたが、より一般には何が成り立つのだろうか？

**問 4.2** ダークマターのゆらぎは一般に流体の方程式で表現される。具体的には摂動を入れて 1 次近似をとると、

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_m\delta \quad \left( \delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0}, a \equiv \frac{R}{R_0} \right) \quad (4.9)$$

である。この式を用いて、平坦・物質優勢・膨張なしの宇宙では

$$\delta(t) \propto t^{2/3} \propto a$$

であることを示せ。ただし  $H(t) = 2/(3t)$  としてよい。

解答 平坦かつ物質優勢の宇宙では  $\Omega_m \equiv (8\pi G\rho_m)/(3H^2) = 1$  としてよいので、

$$4\pi G\rho_m = \frac{3}{2}H(t)^2$$

である。また式 (1.12) より

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

である。これらを式 (4.9) に代入して  $H(t) = 2/(3t)$  を用いると、

$$\ddot{\delta} + 2H(t)\dot{\delta} = \frac{3}{2}H(t)^2\delta, \quad \therefore \ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} = \frac{2}{3t^2}\delta$$

を得る。ここで解の形を  $\delta = At^B$  ( $A, B$  は定数) と場当たり的に仮定して上の式に代入すると、

$$\begin{aligned} AB(B-1)t^{B-2} + \frac{4}{3t} \cdot ABt^{B-1} &= \frac{2}{3t^2} \cdot At^B, \\ \therefore At^{B-2} \left[ B^2 + \frac{1}{3}B - \frac{2}{3} \right] &= 0, \\ \therefore At^{B-2}(B+1) \left( B - \frac{2}{3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。この解のうち  $A = 0$  はつまらなく、 $B = -1$  ではゆらぎはすぐに減衰し、無視できてしまう。よって妥当な解としては唯一  $B = 2/3$  が残り、したがって  $\delta(t) \propto t^{2/3} \propto a$  である。■

より一般には

$$\frac{\delta(z=0; \Omega_{m,0}; \Omega_{\Lambda,0})}{\delta(z=0; \Omega_{m,0}=0; \Omega_{\Lambda,0}=0)} \simeq \frac{5}{2}\Omega_{m,0} \left[ \Omega_{m,0}^{4/7} - \Omega_{\Lambda,0} + \left(1 + \frac{1}{2}\Omega_{m,0}\right) \left(1 + \frac{1}{70}\Omega_{\Lambda,0}\right) \right]^{-1} \quad (4.10)$$

という解答が得られている。これは平坦 ( $k = 0$ ) な宇宙の場合  $\simeq \Omega_{m,0}^{0.65}$ 、膨張なし ( $\Lambda = 0$ ) の宇宙の場合  $\simeq \Omega_{m,0}^{0.23}$  と近似できる。逆に宇宙が平坦でないか膨張があると、加速膨張により宇宙初期よりも後の時代で大規模構造の形成が阻害され、 $\delta$  の値はより小さくなる。ただし  $\Lambda$  は後の時代になってからしか効いてこないの、「平坦かつ膨張あり」よりも「平坦でなくかつ膨張なし」の方が構造形成の抑制は強くなる。ちなみにこれに関連して、特異速度の幅  $\delta v$  が

$$\delta v \simeq H_0 r \Omega_{m,0}^{0.6} \frac{\delta \rho}{\rho}$$

をみたすことも知られている。

上の問 4.2 の設定下でのパワースペクトルは、 $P(k) \equiv \langle |\delta_k|^2 \rangle \propto t^{4/3}$  で与えられる。線形理論近似が成り立つ範囲内では  $P(k)$  の Fourier モードはそれぞれ独立に進化するが、それは変換関数  $T(k)$  を用いて

$$\Delta(k; z=0)^2 = T(k)^2 f(a)^2 \Delta(k; z)^2$$

と表される。ここに

$$\Delta(k)^2 \equiv \frac{V}{2\pi^2} k^3 P(k) \quad (2.43)$$

は無次元化されたパワースペクトルであり、 $f(a)$  (物質優勢・ $\Lambda = 0$  の宇宙で  $\propto t^{2/3}$ ) は成長率である。上の式を計算するにはさまざまな効果を考えなければならずその過程は非常に複雑であるが、最終的には

$$\Delta(k)^2 \propto k^{3+n_s} T(k)^2 \quad (n_s \text{ は定数})$$

が得られる。この比例定数  $A$  は以下のようにして求める：まず銀河における相関関数は共動距離で  $r = 8h^{-1}$  Mpc のスケールで  $\xi(r) \simeq 1$  である。しかし銀河のクラスタリングにはバイアスがあるので、代わりに  $8h^{-1}$  Mpc のカーネルで物質密度分布を畳み込み、得られた分布の標準偏差（ふつう  $\sigma_8$  と書く）から  $A$  を決定する。またバイアスがスケールに依存しないのならば、そのパラメータも

$$b = \frac{\sigma_8(\text{galaxies})}{\sigma_8(\text{mass})}$$

として計算できる。

一方で密度のゆらぎが Gauss 分布だと思つと、ダークハローの質量関数（単位質量あたりの個数密度）が求められる。まず任意のクランプが密度ゆらぎ  $\delta_{\text{convolved}}$  をもつ確率は、仮定より Gauss 分布：

$$\text{Pr}(\delta_{\text{convolved}})d\delta_{\text{convolved}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{convolved}}^2}} \exp\left(-\frac{\delta_{\text{convolved}}^2}{2\sigma_{\text{convolved}}^2}\right) d\delta_{\text{convolved}} \quad (4.12)$$

に従い、その分散は  $P(k) \propto k^{n_s}$  から  $\sigma_{\text{convolved}} \propto M^{-(3+n_s)/6}$  である。すると、 $\delta_{\text{convolved}}$  がビリアル化された崩壊の起こる  $\delta_c = 1.686$  よりも大きくなる確率は

$$\text{Pr}(> \delta_c, M) = \int_{\delta_c}^{\infty} \text{Pr}(\delta_{\text{convolved}})d\delta_{\text{convolved}} \quad (4.13)$$

と書ける。ここで半径  $R$  のカーネルで密度場を畳み込むとその結果は

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \quad (4.11)$$

に対応し、 $R$  と  $M$  の関係がつくので、 $R$  の関数である式 (4.13) は  $M$  の関数と見なせることになる。とは言え、これはまだ質量関数ではない。これを質量関数に書き換えるためには、

- 周囲の質量に関する確率  $\text{Pr}(> \delta_c, M + dM)$  を引く
- 一度あるクランプの中に入った天体が、その後より大きなクランプに呑み込まれることはないか (**cloud-in-cloud problem**) を調べる
- 低密度領域を含めるために、先程の確率を 2 倍する (cloud-in-cloud problem はこれで解決する)

という作業をせねばならない。これを経ると、質量関数  $n(M)$  は

$$\begin{aligned} n(M)MdM &= 2\rho_0[\text{Pr}(> \delta_c, M) - \text{Pr}(> \delta_c, M + dM)] \\ &= 2\rho_0 \left| \frac{d\text{Pr}(\delta_c)}{d\sigma_{\text{convolved}}} \right| \left| \frac{d\sigma_{\text{convolved}}}{dM} \right| dM \\ &= 2\rho_0 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{1}{\sigma_{\text{convolved}}^2} + \frac{1}{\sigma_{\text{convolved}}} \frac{\delta_{\text{convolved}}^2}{\sigma_{\text{convolved}}^3} \right] \exp\left(-\frac{\delta_{\text{convolved}}^2}{2\sigma_{\text{convolved}}^2}\right) \times (-\alpha M^{\alpha-1})dM \\ &\propto \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}\right] dM, \\ \therefore n(M) &\propto \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-\alpha-2} \exp\left[-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}\right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

と求められる。ただし  $\sigma_{\text{convolved}} \propto M^{-\alpha}$  とおき、 $M_*$  を適当な定数とした。この  $n(M)$  の形は **Press-Schechter モデル** と呼ばれ、 $N$  体シミュレーションの結果と良く一致する。

Press-Schechter モデルを用いるとダークマターの進化は近似計算できるようになるが、一方でバリオンの進化にはガスの冷却/加熱、恒星風によるエネルギーの流入、星間物質の相といった重力以外の物理が関係するので、その計算は大幅に難しくなる。そこで最近ではこれを解決するために、上の要素を簡単化したモデルと  $N$  体シミュレーションを組み合わせた準解析モデルを用いることが多い。準解析モデルは観測結果とある程度一致してはいるものの、まだ未知のパラメータが多く、モデルの解釈も人によってばらばらである。準解析モデルが人によって異なると、そこから得られる仮定も当然変わってくる。

ダークハローと銀河は同じ道を通して進化する訳ではなく、ダークハローが含む銀河の個数の確率分布はハロー占有分布によって記述される。ハロー占有分布は銀河の進化を計算する上で重要な役割を担い、小さなスケール（共動距離で  $\lesssim 1$  Mpc）での相関関数を用いて制限される。

そもそもバリオンとダークマターが互いに異なった振る舞いをするのは、両者の振る舞いが同じだと仮定すると、銀河の伴銀河の数が現実よりも多くなってしまうからである。最近になって新しい伴銀河が次々見つかったのはいるものの (3.11 節)、それでもまだ予想される質量には 4 倍の不足が残っている。この不足は低質量のハローで星形成が抑制されているためと考えられ、数値シミュレーションもこれを支持している。もしもこれが正しければ、銀河は「銀河のなりそこない」たちに囲まれていることになる。

バリオンの質量の不足に加え、ダークハローの密度は中心にピークをもたないという問題もある。 $N$  体シミュレーションからはダークハローの中心部は **Navarro-Frenk-White 分布**:  $\rho(r) \propto 1/r$  に従うはずであるが、実際の観測ではこの分布は成り立っていない。これはおそらく超新星やブラックホールからの風が物質を吹き飛ばし、分布を緩やかにしているためと思われる。

### 4.3 種族合成

4.1 節で青色銀河問題が登場したが、これは銀河の光度が進化すると考えればある程度まで解決された。しかし、そもそも銀河の進化を予測することは可能なのだろうか？

銀河の主成分たる恒星の進化はよく理解されているので、銀河の進化を予測するには銀河の初期条件さえ分かればよいだろう。この考え方を**種族合成法 (population synthesis)** という。この考え方は当然、

- 星形成は今も継続しているのか、1 回の爆発だけで終わってしまったのか (3.7 節)
- 星の分布の始まり (**初期質量関数: IMF**) はどのようなであったか
- スペクトルはダスト\*4によりどう変化するのか

といったの仮定の上に成り立っている。例えば 10 億年間の爆発的星形成で形成された銀河の進化は、次図 4.6 のようになる。

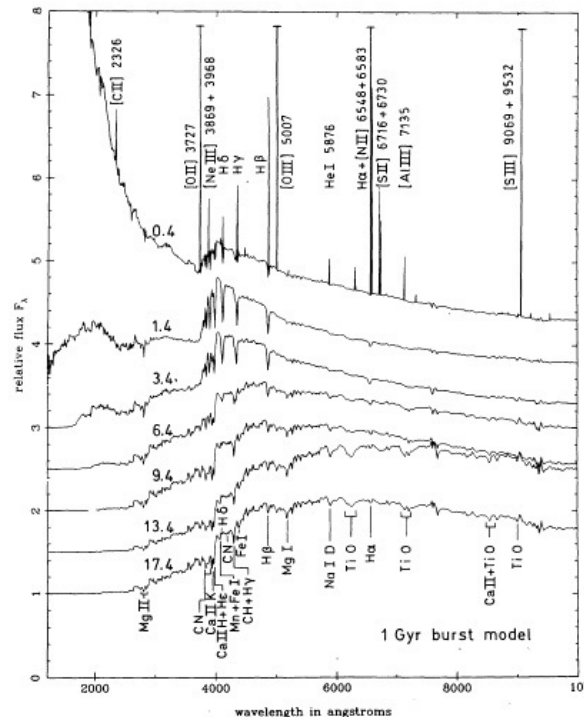


図 4.6 10 億年間の爆発的星形成で形成された銀河のスペクトルの進化。横軸は波長、縦軸はフラックスの比。

いくつもある仮定の中で、単位時間あたりに形成される星の個数 (**星形成率**) は特に重要である。研究によっては初期の爆発的星形成が仮定されたり、観測結果から星形成率の時間変化が予測されたりしている。一方爆発的星形成の後のように星形成がないのであれば、銀河は恒星の進化に従って進化する (受動的恒星進化; 3.7 節)。

もう一つ、初期質量関数 (IMF) も重要である。例えば進化の初期における単位質量あたりの星の個数  $dN/dm$  は  $dN/dm \propto m^{-2.35}$  ( $0.1-100 M_{\odot}$ ) に従うと予想されており、これは現在の銀河系における星の分布と一致している (ただし IMF は銀河系内や他の銀河でも一定とは限らない)。また星形成率は大質量星からの輻射を元に推測するが、小質量星まで含めた星形成の個数を求めるには大質量星の結果を外挿する必要がある。その過程は IMF の形に強く依存する。

\*4 赤色巨星や超新星からの恒星風によって生まれ、グラファイトかシリケートから構成されたもの。大きさは原子数個分からマイクロまで様々であり、大きなものは太陽系に侵入して地球にも降り注ぐ (図 4.7)。

さらにダストによる赤化も分かっていない。赤化とは星間物質がその背景にある天体からの光の青い側を吸収し、光を赤く見せることである。すなわち赤化があると背景光の  $B - V$  が大きくなる（問 4.3）訳であるが、その元の値からのずれを色超過といい、

$$E(B - V) \equiv (B - V)_{\text{obs}} - (B - V)_{\text{true}} \quad \left( \begin{array}{l} (B - V)_{\text{true}} \text{ は元々の値,} \\ (B - V)_{\text{obs}} \text{ は観測値} \end{array} \right) \quad (4.15)$$

と書く。また  $V$  バンドにおける明るさ自身もダストの吸収により小さくなり（星間減光）、その等級の変化を

$$A_V \equiv R_V E(B - V) \quad (R_V \text{ は定数}) \quad (4.16)$$

と書く。 $R_V$  はダストの組成によって変化し、銀河系においては 2.75-5.3、典型的には 3.1 である。減光の程度がダストの組成によって変わるのは他の波長帯でも同じであり、波長 217.5 nm における吸収の違いもダストの組成の違いによる（図 4.8）。

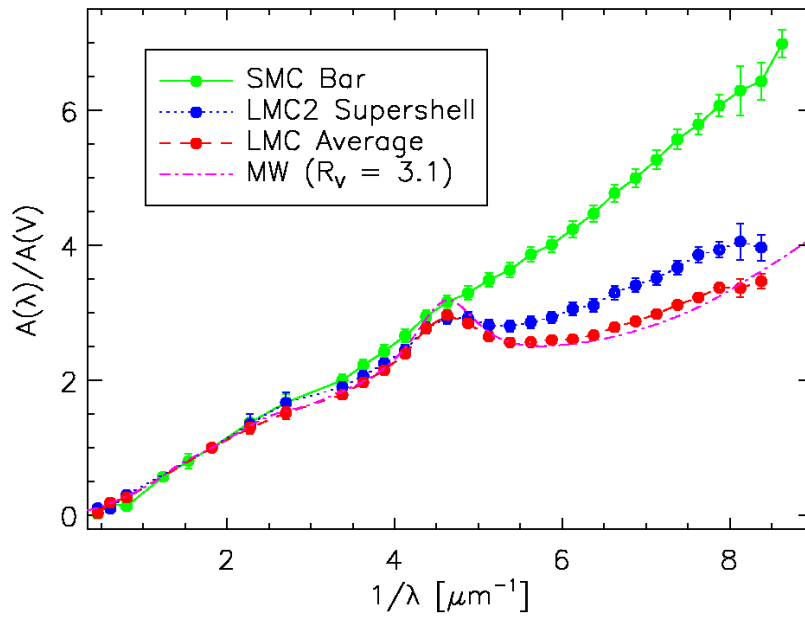


図 4.8 波長による星間減光の違い。横軸は波長の逆数、縦軸は各波長における減光率。

問 4.3  $(B - V) = 0$  と  $(B - V) = 1$  ではどちらの方が赤いか？

解答 そもそも  $B - V$  は色指数と呼ばれ、 $B$  バンド・ $V$  バンドでの見かけの等級

$$\begin{aligned} m_B &= -2.5 \log S_B + C_B, \\ m_V &= -2.5 \log S_V + C_V \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} S \text{ はフラックス, } C \text{ は定数.} \\ C_B = C_V \text{ とは限らない} \end{array} \right)$$

を用いて

$$(B - V) \equiv m_B - m_V = -2.5 \log \left( \frac{S_B}{S_V} \right) + C \quad (C \equiv C_B - C_V)$$

と定義されているのであった。すると  $(B - V)$  が与えられたときは逆に

$$\log \left( \frac{S_B}{S_V} \right) = -0.4[(B - V) - C], \quad \therefore \frac{S_B}{S_V} \propto 10^{-0.4(B - V)}$$

となり、 $(B - V)$  が大きいほど  $S_B/S_V$  は小さくなる、すなわち  $S_V$  の割合が大きくなることが分かる。したがって、 $(B - V) = 1$  の方が赤い。

ダストによる吸収の度合いを調べるには色指数の他に、**Balmer decrement** を使うこともできる<sup>\*5</sup>。H $\alpha$  を作る光子が通った領域の光学的厚みを  $\tau_{H\alpha}$  とおくと、H $\alpha$  のフラックスは  $e^{-\tau_{H\alpha}}$  の割合で小さくなる。また H $\beta$  についても同じことをすると、 $\tau_{H\beta} \simeq 1.45\tau_{H\alpha}$  を得る。すると強度比が

$$\frac{I_{H\alpha}}{I_{H\beta}} = \frac{I_{H\alpha}(0)e^{-\tau_{H\alpha}} + S_{H\alpha}(1 - e^{-\tau_{H\alpha}})}{I_{H\beta}(0)e^{-1.45\tau_{H\alpha}} + S_{H\beta}(1 - e^{-1.45\tau_{H\alpha}})} \quad (S \text{ は源泉関数})$$

という  $\tau_{H\alpha}$  だけの関数になるので、これを理論値の 2.8 と比較すれば  $\tau_{H\alpha}$  が求められる。すると  $\tau_{H\alpha} (\simeq 0.7A_V)$  も分かっているの、 $A_V$  も求められる。

さらに、色超過は柱密度と

$$\frac{N_H}{E(B - V)} = 4.93 \times 10^{21} \text{ /cm}^2/\text{mag}$$

で関係していることが経験的に分かっているの、これを用いて吸収を調べることもできる。

天体からの光の色を変えるのはダストによる吸収だけではない。次の問題で見るように、ダストの 場所 も色を変えることがある。

**問 4.4** (1) 今までの議論は、ダストが輝線を放出するガスの前（我々に近い方）にいて光を吸収すると仮定していた。ではダストがガスと混ざり合っている場合、輝線強度比  $I_{H\alpha}/I_{H\beta}$  はどうなるか？  
(2) (1) のガスを観測した A 君は、ダストがガスの前にあると思い込んで  $A_V$  を計算してしまった。このとき  $A_V$  は正しい値からどのようにずれるか？

**解答** (1) 簡単のため、ガスとダストは断面積  $A$ 、奥行き  $h$  の円柱の中に入っているとする。円柱の手前からの距離を  $x$  ( $0 \leq x \leq h$ ) とおくと、 $x \rightarrow x + dx$  の部分の薄い円柱が放つ光度は  $dL = \rho A dx$  ( $\rho$  は単位体積あたりの光度) と書ける。これは  $x$  までの光学的厚み  $\tau(x)$  により  $e^{-\tau(x)}$  の減衰を受けるが、 $\tau(x)$  は  $x$  に比例する： $\tau(x) = kx$  ( $k$  は比例定数) ので、円柱を出た所での光度は

$$dL_{\text{out}} = dL \times e^{-\tau(x)} = \rho A dx \times e^{-kx}$$

となる。したがって円柱全体が放つ光度は、これを積分して

$$L_{\text{out}} = \int_{x=0}^{x=h} dL_{\text{out}} = \rho A \int_0^h e^{-kx} dx = \frac{\rho A}{k} (1 - e^{-kh})$$

である。これをダストによる減衰がない場合 (光度  $L_{\text{no dust}} = \rho Ah$ ) と比較すると、

$$\frac{L_{\text{out}}}{L_{\text{no dust}}} = \frac{(\rho A/k)(1 - e^{-kh})}{\rho Ah} = \frac{1}{kh} (1 - e^{-kh}) \simeq \frac{1}{kh} \quad (h \text{ が十分大きいとき})$$

となる。すると  $\tau_{H\beta} \simeq 1.45\tau_{H\alpha}$  に気をつけて、

$$\begin{aligned} \frac{L_{\text{out}}(H\alpha)}{L_{\text{no dust}}(H\alpha)} &= \frac{1}{k_{H\alpha}h}, \\ \therefore \frac{L_{\text{out}}(H\beta)}{L_{\text{no dust}}(H\beta)} &= \frac{1}{k_{H\beta}h} = \frac{1}{1.45} \frac{1}{k_{H\alpha}h} = \frac{1}{1.45} \frac{L_{\text{out}}(H\alpha)}{L_{\text{no dust}}(H\alpha)} \end{aligned}$$

より

$$\frac{L_{\text{out}}(H\alpha)}{L_{\text{out}}(H\beta)} = 1.45 \frac{L_{\text{no dust}}(H\alpha)}{L_{\text{no dust}}(H\beta)}$$

を得る。これは  $A$ ,  $h$ ,  $\rho$  に依存しないので、最初においた仮定には結局依存しないことが分かる。したがってどのような場合にも上の式は成立し、輝線強度比も

$$\frac{I_{\text{out}}(H\alpha)}{I_{\text{out}}(H\beta)} = 1.45 \frac{I_{\text{no dust}}(H\alpha)}{I_{\text{no dust}}(H\beta)}$$

をみtas。

<sup>\*5</sup> 熱い星からの輻射でイオン化された水素が放出する輝線を **Balmer 線** といい、H $\alpha$ , H $\beta$ , ... と書く。それらの強度比は物理的に計算できる。

(2) ダストがガスの前にあると思うと、光度の減衰は単に

$$\begin{aligned} L_{\text{out}}(\text{H}\alpha) &= L_{\text{no dust}}(\text{H}\alpha) \times e^{-\tau_{\text{H}\alpha}}, \\ L_{\text{out}}(\text{H}\beta) &= L_{\text{no dust}}(\text{H}\beta) \times e^{-\tau_{\text{H}\beta}} = L_{\text{no dust}}(\text{H}\beta) \times e^{-1.45\tau_{\text{H}\alpha}} \end{aligned}$$

に従うので、その比は

$$\frac{L_{\text{out}}(\text{H}\alpha)}{L_{\text{out}}(\text{H}\beta)} = e^{0.45\tau_{\text{H}\alpha}} \frac{L_{\text{no dust}}(\text{H}\alpha)}{L_{\text{no dust}}(\text{H}\beta)}$$

となる。これが (1) の結果と等しいと思ってしまうと

$$e^{0.45\tau_{\text{H}\alpha}} = 1.45, \quad \therefore \tau_{\text{H}\alpha} = \frac{\ln 1.45}{0.45} \simeq 0.83$$

を得、 $A_V$  は  $A_V \simeq \tau_{\text{H}\alpha}/0.7 \simeq 1.2$  という一定値をとるように見える。

前述したように、光学的厚みは波長によって互いに異なる ( $\tau_{\text{H}\alpha} < \tau_{\text{H}\beta}$ )。しかし我々が観測する光はもっぱら光学的に薄い領域からのものであり、短波長側に行くほど減光は少なくなっていく。現代の種族合成法は、以上に述べてきたような仮定や予想をすべて考慮に入れて行われている。

〈今日のまとめ〉

- ・ 暗い青色銀河問題：膨張する宇宙では高  $z$  で時間と空間が大きくなるので、B バンドの暗い側での銀河の個数がより多くなる。
- ・ ダークマターの種類：宇宙の晴れ上がりのときに相対論的であったダークマターを熱いダークマター (**HDM**)、非相対論的であったダークマターを冷たいダークマター (**CDM**) と呼ぶ。観測結果に合っているのは CDM。
- ・ 階層的構造形成：小さなダークハローが合体して大きなダークハローを形成した。
- ・ 平坦 ( $\Lambda = 0$ ) かつ閉じている ( $k = +1$ ) 宇宙：Friedmann 方程式は

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = R_{\max}R - R^2 \quad (4.1)$$

と書け、その解は

$$R(\theta) = \frac{R_{\max}}{2}(1 - \cos \theta), \quad (4.2)$$

$$t(\theta) = \frac{R_{\max}}{2c}(\theta - \sin \theta); \quad (4.3)$$

すなわちサイクロイド。

- $R(\theta)$  は  $\theta = 0$  で始まって膨張し、 $\theta = \pi$  で収縮に転じ (**turn-around time**)、 $\theta = 2\pi$  で 1 点に潰れる。
- 密度のゆらぎ  $\delta$  は  $\theta \simeq 0$  で

$$\delta \simeq \frac{3}{20} \left(\frac{12c}{R_{\max}}\right)^{2/3} t^{2/3} \propto t^{2/3} \propto a \quad \left(a \equiv \frac{R}{R_0}\right), \quad (4.8)$$

より一般には

$$\frac{\delta(z=0; \Omega_{m,0}; \Omega_{\Lambda,0})}{\delta(z=0; \Omega_{m,0}=0; \Omega_{\Lambda,0}=0)} \simeq \frac{5}{2} \Omega_{m,0} \left[ \Omega_{m,0}^{4/7} - \Omega_{\Lambda,0} + \left(1 + \frac{1}{2} \Omega_{m,0}\right) \left(1 + \frac{1}{70} \Omega_{\Lambda,0}\right) \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

- パワースペクトルは、変換関数  $T(k)$  を用いて

$$\Delta(k; z=0)^2 = T(k)^2 f(a)^2 \Delta(k; z)^2.$$

- ・ **Press-Schechter モデル**：ダークハローの質量関数は、密度ゆらぎが Gauss 分布だと思うと

$$n(M) \propto \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-\alpha-2} \exp \left[ - \left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha} \right]. \quad (4.14)$$

- ・ バリオンとダークマターの問題：

- 両者の振る舞いが同じだと仮定すると、銀河の伴銀河の数が現実よりも多くなってしまう。  
↑ 低質量のハローで星形成が抑制されているため？
- ダークハローの密度は中心にピークをもたない。  
↑ 超新星やブラックホールからの風が物質を吹き飛ばし、分布を緩やかにしているため？

- ・ 種族合成：銀河の進化を予測するには銀河の初期条件が分かればよい。この考え方は

- 星形成率
- 初期質量関数 (**Initial Mass function: IMF**)
- ダストによるスペクトルの変化 (赤化)

といった仮定の上に成り立っている。

〈単語リスト〉

p.120

- discrepancy 「食い違い、相違」
- concordance 「一致、調和」

p.123

- incidentally 「ちなみに；たまたま」

p.125

- shed light on 「(問題) に光を当てる、はっきりさせる」 = cast/throw light on

p.128

- blob 「阿呆、間抜け、ドジ」
- as yet 「今のところは(～ない)」

p.129

- alleviate 「～を軽減する、和らげる」
- puddle 「水たまり」
- cusp 「先端、尖った部分」
- from first principles 「第一原則から」
- colloquial 「口語の」 ↔ literary
- detritus 「有機堆積物(生物の死骸や排泄物などが堆積した泥)」

p.131

- attenuate 「弱まる、減衰する」 → attenuation (n.)

p.132

- improvise 「(～を) 即興でやる、間に合わせで作る」