

〈前回の復習〉

・ **Olbers** のパラドクス：一様等方な宇宙を仮定すると、夜空は太陽程度か無限大の明るさをもつ。解決は後で。

・ **Robertson-Walker** 計量：

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.6)$$

$R(t)$  はスケール因子； $k$  は宇宙の曲率が0（平坦）なとき0、曲率が正（閉じている）のとき+1、曲率が負（開いている）のとき-1。

・ **Friedmann** 方程式：

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G(\rho_m + \rho_r)R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3}, \quad (1.7)$$

$$\ddot{R} = -4\pi G \left( \rho_m + \rho_r + \frac{3p}{c^2} \right) \frac{R}{3} + \frac{\Lambda c^2 R}{3} \quad (1.8)$$

これは宇宙の膨張を表す。 $\Lambda$  は宇宙定数（万有斥力に相当する）。

・ 赤方偏移：

$$1 + z = \frac{R_0}{R} = \frac{1}{a} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emitted}}} \quad \text{または} \quad z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{emitted}}} \quad (1.10, 1.11)$$

ただし、 $a = R/R_0$  は無次元化されたスケール因子；添字0は現在の値。赤方偏移と Doppler shift は別物！

・ **Hubble** パラメータ：

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \quad (1.12)$$

現在の値は  $h = 0.72 \pm 0.03$  として  $H_0 = 100h$  km/s/Mpc。これを用いると、距離  $\ell$  にある銀河の“後退”速度は

$$v = \ell \times H, \quad (1.13)$$

式 (1.7) の宇宙膨張は

$$H^2 = \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi(\rho_m + \rho_r)}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2}. \quad (1.14)$$

・ 密度パラメータ：

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2}, \quad \text{物質} \quad (1.15)$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi G \rho_r}{3H^2}, \quad \text{輻射} \quad (1.16)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \quad \text{ダークエネルギー} \quad (1.17)$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R^2 H^2} \quad \text{宇宙の非平坦性} \quad (1.18)$$

を用いると、式 (1.14) は

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (1.19)$$

観測値は

$$\Omega_{m,0} h^2 = 0.1326 \pm 0.0063, \quad \text{物質：0.26} \quad (1.24)$$

$$\Omega_{r,0} \simeq 4.2 \times 10^{-5}, \quad \text{輻射：0} \quad (1.27)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030, \quad \text{ダークエネルギー：0.74} \quad (1.25)$$

$$\Omega_{b,0} h^2 = (2.273 \pm 0.062) \times 10^{-2} \quad \begin{array}{l} \text{バリオン：0.04} \\ \text{(ダークマター：0.22)} \end{array} \quad (1.26)$$

# 1 空間と時間（続）

## 1.6 宇宙の年齢

宇宙の年齢はどのくらいなのだろう？ 遠方銀河からの光が地球に届くのはどれくらいの時間がかかるのだろうか？

驚くべきことに、ビッグバンからの今までに経った時間は数 % 以内の精度で求められている。これを計算するために、まずは  $z$  を各時代の宇宙年齢に結びつけよう。Hubble パラメータは現在のスケール因子  $R_0$  を用いて

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} = \frac{R_0}{R} \frac{d(R/R_0)}{dt} = (1+z) \frac{d[1/(1+z)]}{dt} = -(1+z) \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt} = \frac{-1}{1+z} \frac{dz}{dt} \quad (1.28)$$

と書ける。また式 (1.4) を輻射を 0 とした上で

$$-kc^2 = H^2 R^2 - \frac{8\pi G \rho_m R^2}{3} - \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} \quad (1.29)$$

と書き直すと、これは現在の値（添字 0）では

$$-kc^2 = H_0^2 R_0^2 - \frac{8\pi G \rho_{m,0} R_0^2}{3} - \frac{\Lambda c^2 R_0^2}{3} \quad (1.30)$$

である。これら 2 式は左辺が等しいので右辺同士も当然等しく、 $\rho_m = \rho_{m,0} \times (R_0^3/R^3)$  より

$$H^2 R^2 - \frac{8\pi G \rho_{m,0} R_0^3}{3R} - \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} = H_0^2 R_0^2 - \frac{8\pi G \rho_{m,0} R_0^2}{3} - \frac{\Lambda c^2 R_0^2}{3}$$

が成り立つ。これを変形していくと、

$$H^2 R^2 = H_0^2 R_0^2 + \frac{8\pi G \rho_{m,0} R_0^2}{3} \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} (R^2 - R_0^2) \quad \text{整理した}$$

$$\therefore \left( \frac{H}{H_0} \right)^2 = \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 + \frac{8\pi G \rho_{m,0}}{3H_0^2} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{R_0^2}{R^2} \right) \right] \quad \text{両辺} \div H_0^2 R^2 \quad (1.31)$$

$$= \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \left[ 1 + \Omega_{m,0} \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) \right] + \Omega_{\Lambda,0} \left[ 1 - \left( \frac{R_0^2}{R^2} \right) \right] \quad \text{式 (1.15)(1.17) より} \quad (1.32)$$

$$= (1+z)^2 (1 + z\Omega_{m,0}) - z(1+z)\Omega_{\Lambda,0} \quad \text{式 (1.10) より} \quad (1.33)$$

$$\therefore \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = H^2 (1+z^2) = H_0^2 (1+z)^2 [(1+z)^2 (1 + z\Omega_{m,0}) - z(1+z)\Omega_{\Lambda,0}] \quad \text{式 (1.28) より} \quad (1.34)$$

を得、 $dt/dz$  が求められる。右辺にある量はいずれも現在観測可能な量であることに注意！

$dt/dz$  は解析的に積分できないので、数値的に積分して  $t = t(z)$  を求めることになる。 $t(z = \infty)$  が宇宙年齢に相当する（図 1.12）。また  $t(z)$  は赤方偏移  $z$  からの光が地球に届くのにかかる時間であり、**lookback time** ともいう。

以上の見積もりは宇宙最古の天体の年齢とどう関係しているのだろうか？ 今は主系列星の理論を用いて星の年齢を求めることができる。特に便利なのは球状星雲であり（図 1.13）であり、これは重力で束縛されている天体の中ではもっとも古いものの一つである。球状星団を構成する星はどれもほぼ同じ時代に生まれたと考えられており、明るい星ほど主系列に留まっている時間は短い。したがって球状星団の中で主系列から離れる星を見れば、その星団の年齢を推定できる。

知られている中でもっとも古い球状星団は  $(127 \pm 7)$  億歳である。1990 年代には、球状星団の年齢を用いて宇宙論的パラメータに重要な制限を与えていた。そのために後で見るように、我々は  $\Omega_{m,0} = 1$ ,  $\Lambda = 0$  という（球状星団よりも）若く見える宇宙に住んでいる、という議論も成り立っていた。

**問 1.4** 式 (1.33) などから出発して、 $\Omega_m = 1$ ,  $\Lambda = 0$  の宇宙では

$$\frac{R}{R_0} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (1.35)$$

であることを示せ。

解答 式 (1.34) に  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = \Lambda c^2 / (3H^2) = 0$  を代入して整理すると

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H_0^2 (1+z)^5, \quad \therefore \frac{dt}{dz} \propto (1+z)^{-5/2}$$

となる。これは積分できて  $t \propto (1+z)^{-3/2}$  であるが、 $1+z \equiv R_0/R$  より

$$t \propto R^{3/2}, \quad \therefore R = Ct^{2/3} \quad (C \text{ は比例定数})$$

と書ける。これは現在の値では  $R_0 = Ct_0^{2/3}$  なので、両辺を割って

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (1.35)$$

が示された。■

問 1.5 式 (1.35) を用いて、 $\Omega_m = 1$ ,  $\Lambda = 0$  の宇宙の年齢は

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

であることを示せ。このモデルは **Einstein-de Sitter** モデルと呼ばれることがある。

解答 式 (1.35) より

$$R = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

であるが、これより Hubble パラメータが

$$H \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{R_0(t/t_0)^{2/3}} \cdot \frac{2R_0}{3} \frac{t^{-1/3}}{t_0^{2/3}} = \frac{2}{3t}$$

と計算できる。ゆえに現在の宇宙年齢は、 $H_0 = 72 \pm 3 \text{ km/s/Mpc}$  を用いて

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 9.1 \pm 0.4 \text{ Gyr}$$

となる。■

## 1.7 平坦性問題

既に見たように、密度パラメータは時刻（赤方偏移）に依存する。例えば  $z = 1000$  ( $t \sim 44$  万年) のときの  $\Omega_m$  を計算してみよう。式 (1.18) を現在の表式

$$\Omega_{k,0} = \frac{-kc^2}{R_0^2 H_0^2}$$

で割ると、

$$\frac{\Omega_k(t)}{\Omega_{k,0}} = \frac{R_0^2 H_0^2}{R^2 H^2} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = (1+z)^2 \frac{1}{(1+z)^2 (1+z\Omega_{m,0})} = \frac{1}{(1+z\Omega_{m,0})}$$

となる。ただし  $\Lambda = 0$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$  とした。このとき  $\Omega_m = 1 - \Omega_k$  なので、 $\Omega_k$  と  $\Omega_m$  の時間発展を求めることができる。

例 1  $\Omega_{m,0} = 1$  のとき、 $\Omega_{k,0} = 0$  より  $k = 0$  なので、常に  $\Omega_k = 0$ ,  $\Omega_m = 1$ 。

例 2  $\Omega_{m,0} = 0.7$  のとき、 $z = 1000$  で  $\Omega_m = 0.9996$ 。同様に  $z \rightarrow +\infty$  とすると  $\Omega_k \rightarrow 0$ ,  $\Omega_m \rightarrow 1$  となり、 $t = 1 \text{ s}$  のとき  $\Omega_m = 1 - 10^{-5}$ 。したがって  $\Omega_{m,0} \neq 1$  ならば、宇宙の最初期の  $\Omega_m$  は 1 からほんの少しだけずれていたはずである。なぜ  $\Omega_m \rightarrow 1$  なのに厳密には 1 でないのだろうか？

例 3 この **fine-tuning problems** (微調整問題) <sup>\*1</sup> は  $\Lambda \neq 0$  のときに顕著になる。 $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ ,  $\Omega_{m,0} = 0.3$  のとき、 $z = 1000$  で  $\Omega_\Lambda = 3.3 \times 10^{-9}$ ,  $\Omega_m = 0.999\,999\,996$  である。

<sup>\*1</sup> 初期宇宙になぜ  $\Omega_k \rightarrow 0$ ,  $\Omega_m \rightarrow 1$  であったのか。  $\Omega_k = 0$  はすなわち  $k = 0$  (平坦な宇宙) を意味するので、平坦性問題ともいう。

図 1.14 はいくつかの宇宙論モデルについて、密度パラメータの  $z$  依存性を示したものである。もし  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$  であったならばその値は時間によらず一定であり、fine-tuning problems を考える必要はない。しかしそのモデルは、信頼できる実験結果によって否定されている。では fine-tuning problems の原因は何なのだろうか？

$\Omega_k$  が小さいことを説明するものの一つとして後で出てくるインフレーションがあるが、これが正しいかどうかは決して明らかではない。インフレーションでは  $\Omega_m$  の fine-tuning が説明できないからである。

## 1.8 歪んだ時空における距離

1963 年、電波源 3C273 が  $z = 0.158$  の宇宙で発見されたが、これは当時としては前例のないほどの遠方であった。この発見で天文学者たちは思っていたよりももっと広い宇宙を見ることができていることに気がつき、宇宙論に対する気運が一気に高まった。

前節までの内容に則って計算すると、3C273 を発した光は 19 億年（宇宙年齢の 14%）かかって地球に辿りついたことが分かる。これは 3C273 が 19 億光年離れた所にあるということだろうか？

実は膨張する宇宙において、“距離” は非常に難しい概念である（図 1.15）。つまり“距離” が指すのは光が走った長さ (B→C) なのか、光が発せられた時点での距離 (B→A) なのか、今現在での距離 (D→C) なのか？ 宇宙論では Robertson-Walker 計量の慣性系における現在の距離 (D→C) をもって“距離” と呼ぶことにしているが、これを共動距離という。3C273 までの共動距離は 637 Mpc (21 億光年) だが、光が走る間にも 3C273 は宇宙膨張のために遠ざかっているため、共動距離は光の走った距離 (B→C; 19 億光年) よりも長くなっていることに注意しよう。共動距離に対し、宇宙静止系に固定された定規で測った距離のことを固有距離という（図 1.16）。

ある天体までの共動距離を測る（3C273 と地球をテープでつないで、その現在  $t_0$  での長さを測る）には、Robertson-Walker 計量を使えばよい。  $dt = 0$ ,  $d\theta = d\phi = 0$  とすると式 (1.16) は

$$ds^2 = -\frac{R(t_0)^2}{1-kr^2}dr^2 = -\frac{R_0^2}{1-kr^2}dr^2$$

となるが、ここで共動距離  $dd_{\text{comoving}}$  を

$$dd_{\text{comoving}} \equiv \frac{R_0}{\sqrt{1-kr^2}}dr \quad (1.36)$$

もしくは

$$d_{\text{comoving}} \equiv R_0 \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-kr'^2}}dr' \quad (1.37)$$

と定義すると、これは具体的に積分できて

$$d_{\text{comoving}} = \begin{cases} R_0 \sin^{-1} r & (k = +1), \\ R_0 r & (k = 0), \\ R_0 \sinh^{-1} r & (k = -1) \end{cases} \quad (1.38)$$

となる。次にこれをテープではなく、天体から発した実際の光線で考えよう。光に沿った時空距離は  $ds = 0$  なので、 $d\theta = d\phi = 0$  と合わせて

$$cdt = \frac{R(t)}{\sqrt{1-kr^2}}dr \quad (1.39)$$

である。この左辺は  $H \equiv \dot{R}/R$  より

$$cdt = cdR \frac{dt}{dR} = \frac{cdR}{dR/dt} = \frac{cdR}{RH} \quad (1.40)$$

であり、 $R = R_0/(1+z)$  の両辺を微分した式

$$dR = -\frac{R_0}{(1+z)^2}dz$$

と合わせると

$$cdt = -\frac{c}{RH} \frac{R_0}{(1+z)^2}dz = -\frac{1}{(1+z)H}dz$$

が得られる。これを式 (1.40) に戻すと

$$\frac{R}{\sqrt{1-kr^2}}dr = -\frac{c}{(1+z)H}dz \quad (1.41)$$

となるので、最後に両辺を  $R_0/R = 1+z$  倍して

$$\frac{R_0}{\sqrt{1-kr^2}}dr = -\frac{c}{H}dz \quad (1.42)$$

を得る。この左辺は  $dd_{\text{comoving}}$  なので、式 (1.33) を思い出せば

$$dd_{\text{comoving}} = -\frac{c}{H(z)}dz = \frac{c}{H_0} \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(1+z)\Omega_{\Lambda,0}}},$$

もしくは積分形で

$$d_{\text{comoving}} = -c \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')} = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.43)$$

$$= \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1+z')^2(1+z'\Omega_{m,0}) - z'(1+z')\Omega_{\Lambda,0}}} \quad (1.44)$$

と書ける。これは簡単な形になることもあって、例えば  $\Omega_m = 1$ ,  $\Lambda = 0$  のとき

$$d_{\text{comoving}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1+z')^3}} = \frac{2c}{H_0} \left[ -(1+z')^{-1/2} \right]_0^z = \frac{2c}{H_0} \left[ 1 - (1+z)^{-1/2} \right] \quad (1.45)$$

である。

## 1.9 観測可能な宇宙の果て

観測可能な宇宙はどれくらい広いのだろうか？ 宇宙が平坦で膨張していないのであれば、現在観測できる範囲は光が我々に届く  $ct_0$  ( $t_0$  は現在の宇宙年齢) であり、これは時間とともに速さ  $c$  で広がっていくはずである。

しかし膨張している実際の宇宙では、そうではない。まずはこの大きさを計算してみよう。この大きさは共動座標でも固有座標でも等しいので\*2、式 (1.44) で  $z \rightarrow +\infty$  としたものを考えればよい。これは一般に  $c/H_0$  の定数倍であり、特に  $\Omega_m = 0$ ,  $\Lambda = 0$  の場合は式 (1.45) より

$$d_{\text{comoving}} = \frac{2c}{H_0} = 8300 \text{ Mpc}$$

となる。また現在分かっている密度パラメータの値を用いれば

$$d_{\text{comoving}} = \frac{3.53c}{H_0} = 14.7 \text{ Gpc}$$

であり、この内側の体積は **Hubble 体積** と呼ばれることがある。

次に固有座標における宇宙の膨張速度を計算しよう。いま時刻  $t_0$  で固有距離  $R_0r$  にあった天体は\*3、時刻  $t_1 = t_0 + \delta t$  (スケール因子  $R_1$ ) には

$$R_1r = R_0r + (dR)r = R_0r + \left( \frac{dR}{dt} \delta t \right) r \simeq R_0r + (R_0H_0\delta t)r$$

に移る。ゆえに固有距離の変化は

$$\frac{d(Rr)}{dt} \simeq \frac{R_1r - R_0r}{\delta t} = \frac{(R_0H_0\delta t)r}{\delta t} = H_0 \times (R_0r) \quad (1.46)$$

となり、Hubble パラメータが宇宙膨張を表していることが分かる。

式 (1.46) に先程の結果を用いると、現在の膨張速度は

$$H_0 \times \frac{3.53c}{H_0} = 3.53c = 1.1 \times 10^6 \text{ km/s} (> c)$$

という大きな値になる。実は式 (1.13) も宇宙の“後退”速度が  $c$  であることを表していたが、これは膨張していない、平坦な宇宙での話であることに注意！ 実際の膨張している宇宙の“後退”速度は  $3.53c$  である。

\*2 共動距離を測る座標系を共動座標系、固有距離を測る座標系 (すなわち宇宙静止系) を固有座標系という。

\*3 固有距離は、平坦な宇宙での距離  $r$  を用いて  $d_{\text{proper}} = R(t)r$  と書ける。

## 1.10 距離と体積を測る

前節で天体までの距離が  $z$  の関数で表されることを見たが、そのためには各パラメータの値、特に  $H_0$  の値が必要であった。逆にこれらのパラメータを決めるためには、上とは別の方法で距離を測る必要がある。

天体の直径  $D$  が分かっているときには角直径距離が使えて、視直径  $\theta$  と合わせて

$$d_A \equiv \frac{D}{\theta} \quad (1.47)$$

である。次に天体の接線速度  $u$  が分かっているときには固有運動距離が使えて、天球上での角度変化  $\dot{\theta}$  と合わせて

$$d_M \equiv \frac{u}{\dot{\theta}} \quad (1.48)$$

である。最後に天体の光度  $L$  が分かっているときには光度距離が使えて、フラックス  $S$  と合わせて

$$d_L \equiv \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} \quad (1.49)$$

である。これら 3 つの距離は平坦な膨張していない宇宙では一致するが、実際の宇宙では驚くほど異なっている。光子が時刻  $t_1$  (スケール因子  $R_1$ ) で直径  $D$  の天体を発したとすると、 $D = (R_1 r) \times \theta$  より  $d_A = R_1 r$  である (これは固有距離に等しい; 図 1.17)。

次に地球から同じだけ遠くにある天体が固有座標で接線速度  $u$  をもっているとする。このとき宇宙時間の遅れが効いて  $dt'/dt = R_1/R_0$  となるので、

$$u = \frac{dD}{dt'} = \frac{d(R_1 r \theta)}{dt} \frac{dt}{dt'} = (R_1 r) \dot{\theta} \cdot \frac{R_0}{R_1} = (R_0 r) \dot{\theta}$$

である。これを式 (1.48) と比べると、 $d_M = R_0 r$  を得る (これは  $k=0$  のとき共動距離に等しい)。

最後に再び同じだけ離れた光度  $L$  の天体を発した光子は、固有座標での面積  $4\pi(R_0 r)^2$  の範囲に広がっている。 $dt'$  の間に放出されたエネルギーは  $L dt'$  であるが、これは赤方偏移のために  $R_1/R_0$  だけ小さくなる。また宇宙時間の遅れもあるので、我々が受け取るフラックスは

$$S = \frac{L dt' \times (R_1/R_0)}{4\pi(R_0 r)^2 \times dt} = L \frac{dt'}{dt} \frac{R_1}{R_0} \frac{1}{4\pi(R_0 r)^2} = L \frac{R_1}{R_0} \frac{R_1}{R_0} \frac{1}{4\pi(R_0 r)^2} = \frac{L}{4\pi(R_0^2 r/R_1)^2}$$

となる。これを式 (1.49) と比べると、 $d_L = R_0^2 r/R_1$  を得る。すると  $1+z = R_0/R_1$  より

$$d_L = (1+z)d_M = (1+z)^2 d_A \quad (1.50)$$

となって、宇宙論パラメータとは独立な関係式が成り立ってしまう。そこで上の距離たちを測ってパラメータを決定する代わりに、距離の  $z$  依存性を使うことになる (図 1.18)。

図 1.18 を見ると、 $d_A$  には最大値があることが分かる。これは、膨張しない平坦な宇宙では天体は遠くに行くほど小さく見えるが、膨張している宇宙では遠くの天体は大きく見えることがあることを示している！ その原因の一つは光が天体を発したときには宇宙は今よりも小さく、天体は地球に近い所にいたことである (図 1.17 を見よ)。

以上の距離による効果は Olbers のパラドクスにも影響する。次の問題を解いてみよう。

**問 1.6** 表面輝度 (単位平方角あたりのフラックス)  $I$  は  $z$  によってどのように変化するか？

**解答**  $S = L/(4\pi d_L^2) \propto 1/d_L^2$ ,  $\theta = D/d_A \propto 1/d_A$  なので、

$$I \equiv \frac{S}{\theta^2} \propto \left( \frac{d_A}{d_L} \right)^2 = \left[ \frac{1}{(1+z)^2} \right]^2 = \frac{1}{(1+z)^4}$$

である。したがって遠くに行くほど表面輝度は小さくなり、それを全天で足し上げても太陽ほど明るくはならない。一方平坦で膨張しない宇宙では表面輝度は天体までの距離によらず一定であり、それを足し上げると太陽と同じくらい明るくなってしまった (1.1 節)。■

ところで全波長に渡る光度（全輻射光度）を観測することは難しく、その代わりに  $z$  と、 $\Delta\lambda_{\text{obs}}$  に渡る光度を観測することが多い。またフラックスは宇宙膨張による 2 つの影響を受けている。まず  $\Delta\lambda_{\text{obs}}$  は光が放出された系での  $\Delta\lambda_{\text{em}}$  を用いて  $\Delta\lambda_{\text{obs}} = (1+z)\Delta\lambda_{\text{em}} (> \Delta\lambda_{\text{em}})$  と表される。次に天体は静止系における波長  $\lambda_{\text{em}}$  と  $\lambda_{\text{obs}}$  で異なる輻射をしているかもしれない（**K-補正**）。例えばフラックス密度が  $S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$  ( $\nu$  は周波数) と表されているとき、

$$\frac{L_\nu}{10^{26} \text{ W/Hz/sr}} = \frac{S_\nu}{10^{-26} \text{ W/Hz/m}^2} \left( \frac{d_M}{3241 \text{ Mpc}} \right)^2 (1+z)^{1+\alpha} \quad (1.51)$$

が成り立つ。

また宇宙論では、膨張率で割った空間の体積を指して共動体積ということが多い（図 1.16）。共動座標における角度の広がり  $\delta\Omega$  は、固有座標では  $\delta A = d_A^2 \delta\Omega$  となる。このとき、赤方偏移  $z$  の所にある面積  $\delta A$ 、厚さ  $Rdr/\sqrt{1-kr^2}$ （ともに固有座標での値）の円板を考える。すると固有体積（固有座標で測った体積）は

$$dV_{\text{proper}} = \delta A \times \frac{R}{\sqrt{1-kr^2}} dr = d_A(z)^2 \delta\Omega \times \frac{R}{\sqrt{1-kr^2}} dr \quad (1.52)$$

であり、共動体積との関係  $dV_{\text{comoving}} = (1+z)^3 \times dV_{\text{proper}}$  を用いると

$$dV_{\text{comoving}} = d_A(z)^2 \delta\Omega \times \frac{R}{\sqrt{1-kr^2}} dr \times (1+z)^3 \quad (1.53)$$

を得る。これを積分するには、右辺を  $d_M = R_0 r$  の関数として表すとよい。 $d_M(z) = (1+z)d_A$  および  $\Omega_{k,0} = -kc^2/(R_0^2 H_0^2) = -kr^2 c^2/(d_M^2 H_0^2)$  より、

$$dV_{\text{comoving}} = \frac{d_M^2}{\sqrt{1 + \Omega_{k,0} H_0^2 d_M^2 / c^2}} d(d_M) \delta\Omega \quad (1.54)$$

である。これは解析的に積分できて、例えば  $k = +1$  のとき  $\Omega_{k,0} < 0$  に気をつけると、公式

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

より

$$\begin{aligned} V_{\text{comoving}} &= \int_{z=z}^{z=0} \frac{d_M^2}{\sqrt{1 + \Omega_{k,0} H_0^2 d_M^2 / c^2}} dd_M \int_{\Omega} d\Omega \\ &= \int_{d_M}^0 \frac{c^2}{\Omega_{k,0} H_0^2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\Omega_{k,0} H_0^2 d_M^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega_{k,0} H_0^2 d_M^2 / c^2}} \right] dd_M \times 4\pi \\ &= \frac{4\pi c^2}{\Omega_{k,0} H_0^2} \int_{d'_M}^0 \left[ \sqrt{1 - d'^2_M} - \frac{1}{\sqrt{1 - d'^2_M}} \right] d \left( \sqrt{\frac{c^2}{-\Omega_{k,0} H_0^2}} d'_M \right) \\ &= \frac{4\pi}{\Omega_{k,0} \sqrt{-\Omega_{k,0}}} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \left[ \frac{1}{2} \left( d'_M \sqrt{1 - d'^2_M} + \sin^{-1} d'_M \right) - \sin^{-1} d'_M \right]_{d'_M}^0 \\ &= \frac{4\pi}{2\Omega_{k,0} \sqrt{-\Omega_{k,0}}} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \left[ d'_M \sqrt{1 - d'^2_M} - \sin^{-1} d'_M \right]_{d'_M}^0 \\ &= \frac{4\pi}{2\Omega_{k,0} \sqrt{-\Omega_{k,0}}} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \left[ -d'_M \sqrt{1 - d'^2_M} + \sin^{-1} d'_M \right] \\ &= \frac{4\pi}{2\Omega_{k,0}} \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \left[ \frac{H_0}{c} d_M \sqrt{1 + \frac{\Omega_{k,0} H_0^2 d_M^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{-\Omega_{k,0}}} \sin^{-1} \left( \sqrt{-\Omega_{k,0}} \frac{H_0}{c} d_M \right) \right] \\ &= \frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_{k,0}} \left[ \frac{d_M}{D_H} \sqrt{1 + \Omega_{k,0} \left( \frac{d_M}{D_H} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin^{-1} \left( \frac{d_M}{D_H} \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \right) \right] \end{aligned}$$

となる。ここに  $D_H \equiv c/H_0$  を **Hubble 距離** という。  $k = 0, -1$  のときも同様に計算すると、

$$V(d_M) = \begin{cases} \frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_{k,0}} \left[ \frac{d_M}{D_H} \sqrt{1 + \Omega_{k,0} \left( \frac{d_M}{D_H} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin^{-1} \left( \frac{d_M}{D_H} \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \right) \right] & (k = +1), \\ \frac{4}{3} \pi d_M^3 & (k = 0), \\ \frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_{k,0}} \left[ \frac{d_M}{D_H} \sqrt{1 + \Omega_{k,0} \left( \frac{d_M}{D_H} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sinh^{-1} \left( \frac{d_M}{D_H} \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \right) \right] & (k = -1) \end{cases} \quad (1.55)$$

を得る。一方  $V_{\text{comoving}}(z)$  (赤方偏移  $z$  より内側の範囲の体積) は  $dV_{\text{comoving}}/dz$  を  $z$  について数値的に積分すればよい (図 1.19)。ただし  $d_M$  は  $z$  の関数であり、具体的には

$$d_M = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin \left\{ \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z [(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}]^{-1/2} dz \right\} & (k = +1), \\ d_{\text{comoving}} & (k = 0), \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sinh \left\{ \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z [(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}]^{-1/2} dz \right\} & (k = -1) \end{cases} \quad (1.56)$$

である。これは  $k = 0$  のとき のみ  $d_{\text{comoving}}$  に一致し、その値は式 (1.44) で与えられていたことを思い出そう。

## 1.11 宇宙の運命

宇宙論パラメータからは宇宙の運命を知ることできる。Robertson-Walker 計量を用いれば、我々の身体を構成する原子の運命を、短くとも西暦  $10^{35}$  年までは辿れるのである。

再び式 (1.14) から出発するが、今回は変数を  $a = 1/(1+z) = R/R_0$ ,  $\tau = H_0 t$  に変更する：

$$\left( \frac{da}{d\tau} \right)^2 = 1 + \Omega_{m,0} \left( \frac{1}{a} - 1 \right) + \Omega_{\Lambda,0} (a^2 - 1).$$

この式は数値的に積分できて (図 1.20)、既知の宇宙論パラメータの値を代入すれば、宇宙は永遠に膨張することが分かる。宇宙は永遠に膨張すると、膨張に伴い疎になっていき、 $\Omega_m \rightarrow 0$ ,  $\Omega_\Lambda \rightarrow 1$  となる。また Hubble パラメータも

$$H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3\Omega_\Lambda} \rightarrow \frac{\Lambda c^2}{3}$$

となって定数に収束する。またこれに  $H \equiv \dot{R}/R$  を代入すると

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$$

より

$$R \propto e^{ct\sqrt{\Lambda/3}}$$

となって、宇宙は指数関数的に膨張する。これを **de Sitter 時空** という。

宇宙が指数関数的に膨張するのであれば、光であっても 2 点間を結ぶことができず、因果律が成立しなくなることがある。これを示すために、ある点で放出された光を考えよう。この光は膨張する宇宙の中で無限遠まで飛んでいくように見えるが、スケール因子を考慮すれば、光が到達できるのは有限の 共動 体積内に限られる。

$\Omega_m \rightarrow 0$ ,  $\Omega_\Lambda \rightarrow 1$  ならば  $\Omega_k \rightarrow 0$  より  $k \rightarrow 0$  なので、光線に沿った経路では  $R(t)dr = cdt$  である。このとき

$$\frac{R(t)}{R(t_1)} = \frac{e^{ct\sqrt{\Lambda/3}}}{e^{ct_1\sqrt{\Lambda/3}}} = e^{c(t-t_1)\sqrt{\Lambda/3}}$$

なので、 $R(t_1)r = R_1r$  を共動距離と捉えれば

$$R_1 dr = e^{-c(t-t_1)\sqrt{\Lambda/3}} R(t) dr = e^{-c(t-t_1)\sqrt{\Lambda/3}} c dt$$



が成り立つ。したがって  $H^2 = \Lambda c^2/3$  に気を付けると、

$$R_1 r = \int_{t_1}^{\infty} c e^{-c(t-t_1)\sqrt{\Lambda/3}} dt = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda/3}} \left[ e^{-c(t-t_1)\sqrt{\Lambda/3}} \right]_{t_1}^{\infty} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H}$$

となる。ゆえに遠い将来は、光は共動距離  $R_1 r = \sqrt{3/\Lambda}$  までにしか到達できなくなり、 $\sqrt{3/\Lambda}$  を超える天体は見えなくなる。しかし  $H$  は定数なので宇宙の膨張率は一定である。すると  $\sqrt{3/\Lambda}$  の所に地平線があり、天体はその地平線に向かって沈んでいくように見えるだろう。しかし地平線に近づくにつれ  $z$  が大きくなりその天体の時計は遅れるので、天体が地平線を跨ぐことはない（その時計の針は、天体が地平線にたどり着く時刻に漸近するが一致はしない）。一方その天体では彼らの時計は遅れて見えず、我々の時計が遅れ、彼らにとっての地平線に沈んでいくように見える。

これはブラックホールにおける事象の地平線と比較すると分かりやすいかもしれない。実際、 $\sqrt{3/\Lambda}$  の地平線を宇宙論的事象の地平線という。遠い未来の宇宙はブラックホールのように見えるが、中と外はあべこべである。

**問 1.7** 宇宙論的地平線までの距離を求めよ。これは観測可能な宇宙の大きさと比べてどの程度大きいのか？

**解答**  $H_0 = 72 \pm 3 \text{ km/s/Mpc}$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030$  より、

$$\Lambda = \frac{3\Omega_{\Lambda,0}H_0^2}{c^2} = (1.3 \pm 0.2) \times 10^{-7} \text{ /Mpc}^2$$

である。したがって地平線までの距離は

$$\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = (4.9 \pm 0.3) \text{ Gpc}$$

となるが、これは観測可能な宇宙の大きさ

$$\frac{3.53c}{H_0} = 14.7 \text{ Gpc}$$

の 3 分の 1 程度 である。

では我々はどこまで遠くの宇宙を見ることができるのだろうか？ Alpher と Gamow は初期宇宙が核融合が起こるほど高温・高密度だったことに気がついており、重元素の量も計算していた。これは議論が性急過ぎるとして他の物理学者らから非難されたが、彼らはビッグバンのたった 3 分後というごく初期に現在と同じ物理が成り立つかどうか疑問だったのである。しかし後で見るように、核合成は当時から確かに行われていたことが分かっている。

現在宇宙に存在するすべてのバリオンは、星の輪廻に多少なりとも加わっている。しかし今から 1 兆年後には宇宙は極めて疎になり、星形成を起こすことができなくなる。するとバリオンは縮退星（白色矮星か中性子星）に属するか、褐色矮星に閉じ込められるか、ブラックホールに落ち込むか、原子や分子のまま漂っているかのいずれかの道を辿る。さらにその先に待っているのは、陽子崩壊である。

標準素粒子モデルでは陽子は安定で崩壊することはないが、大統一理論によれば寿命を迎えた陽子は崩壊するという。陽子の半減期はカミオカンデ実験から明らかになっており、 $> 10^{35}$  年（0.1 満年）である。これは人類の知ることができる中でもっとも先の未来であろう。

〈今日のまとめ〉

・ **lookback time** : 宇宙年齢  $t = t(z)$  のこと。

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = H_0^2 (1+z)^2 [(1+z)^2 (1+z\Omega_{m,0}) - z(1+z)\Omega_{\Lambda,0}] \quad (1.34)$$

を積分して求める。現在は  $t(z=\infty) = 138$  億年。特に  $\Omega_m = 1$ ,  $\Lambda = 0$  の宇宙では

$$\frac{R}{R_0} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad \therefore t_0 = \frac{2}{3H_0} = 9.1 \pm 0.4 \text{ Gyr} \quad (\text{Einstein-de Sitter モデル}). \quad (1.35)$$

・ **fine-tuning problems** : 初期宇宙 ( $z \rightarrow +\infty$ ) で  $\Omega_k \rightarrow 0$ ,  $\Omega_m \rightarrow 1$  だった。綺麗に漸近するのに一致はしない。インフレーション理論によって解決？

・共動距離と固有距離：共動距離は天体が現在いる位置までの距離のことで、

$$d_{\text{comoving}} = R_0 \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr' = -c \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.37, 1.43)$$

一方固有距離は任意の時刻における天体までの距離のことで、

$$d_{\text{proper}} = R(t)r = \frac{d_{\text{comoving}}}{1 + z}.$$

・宇宙の果てと膨張速度：観測可能な宇宙の大きさは

$$d_{\text{proper}} = d_{\text{comoving}} = \frac{3.53c}{H_0} = 14.7 \text{ Gpc}.$$

また宇宙の膨張速度は  $H \times (Rr)$  で、現在の値は

$$H_0 \times \frac{3.53c}{H_0} = 3.53c.$$

・3つの“距離”：

$$d_A = \frac{D}{\theta} \quad \text{角直径距離（固有距離に等しい）}, \quad (1.47)$$

$$d_M = \frac{u}{\theta} \quad \text{固有運動距離（} k = 0 \text{ のとき共動座標に等しい）}, \quad (1.48)$$

$$d_L = \left( \frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} \quad \text{光度距離}. \quad (1.49)$$

これらは

$$d_L = (1 + z)d_M = (1 + z)^2 d_A \quad (1.50)$$

で結ばれる。これらの  $z$  依存性を使って宇宙論パラメータの値を決定する。

・Olbersのパラドクスの解決：表面輝度が  $1/(1+z)^4$  に比例するので、遠くに行くほど表面輝度は小さくなり、それを全天で足し上げてても太陽ほど明るくはならない。

・共動体積：赤方偏移  $z$  の所にある固有面積  $\delta A$ 、固有厚さ  $Rdr/\sqrt{1 - kr^2}$  の共動体積は

$$V(d_M) = \begin{cases} \frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_{k,0}} \left[ \frac{d_M}{D_H} \sqrt{1 + \Omega_{k,0} \left( \frac{d_M}{D_H} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin^{-1} \left( \frac{d_M}{D_H} \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \right) \right] & (k = +1), \\ \frac{4}{3} \pi d_M^3 & (k = 0), \\ \frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_{k,0}} \left[ \frac{d_M}{D_H} \sqrt{1 + \Omega_{k,0} \left( \frac{d_M}{D_H} \right)^2} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sinh^{-1} \left( \frac{d_M}{D_H} \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \right) \right] & (k = -1). \end{cases} \quad (1.55)$$

$V_{\text{comoving}}(z)$  は  $dV_{\text{comoving}}/dz$  を  $z$  について数値的に積分すればよい。 $d_M$  の  $z$  依存性は

$$d_M = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin \left\{ \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z [(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}]^{-1/2} dz \right\} & (k = +1), \\ d_{\text{comoving}} & (k = 0), \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sinh \left\{ \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z [(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}]^{-1/2} dz \right\} & (k = -1). \end{cases} \quad (1.56)$$

・宇宙の運命：宇宙は永遠に膨張していき、 $\Omega_m \rightarrow 0$ ,  $\Omega_\Lambda \rightarrow 1$ ,  $H \rightarrow c\sqrt{\Lambda/3}$  となる。このとき

$$R \propto e^{ct\sqrt{\Lambda/3}} \quad (\text{de Sitter 時空}).$$

・宇宙の地平線：光が到達できるのは共動距離  $R_1 r = \sqrt{3/\Lambda}$  まで。地平線までの距離は

$$\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = (4.9 \pm 0.3) \text{ Gpc}.$$

〈単語リスト〉

p.26

- ghastly (adv.) 「恐ろしい」 (adv.) 「恐ろしく」
- comprise 「～を含む、～からなる」

p.28

- a class of 「～の類」
- prodigious 「巨大な；並外れた；素晴らしい」

p.32

- guise 「外見；身なり」
- subtend 「(角や弧に) 対する」

p.33

- glean 「～を集める」

p.34

- slab 「厚切り；圧板」

p.37

- rashness (n.) ← rash (adj.) 「性急な、早まった」
- primordial (adj.) 「原始の、最初から存在する」 (n.) 「基本原理」