4年生特訓ゼミ

with

Observational Cosmology

by Stephen Serjeant

理・天文 B4：05152001
菊地原正太郎

第 1 回　2016/4/11（月）　最終改訂　2016/6/3（金）

神は数学的な厳密さなど気にせず、何でも経験的に積分してしまう。

Albert Einstein

1　空間と時間

宇宙はどのように始まったのだろう？　観測できる宇宙はどのくらい広いのだろう？　夜の空はなぜ暗いのだろう？　1 兆年後の宇宙はどうなっているのだろう？　この章ではこれらの疑問に答えるとともに、現代の正確な宇宙論を理解するのに必要な道具を準備する。

読者が予め特殊相対論や Robertson-Walker 計量を知っている必要はないが、この章ではそれらの話題にさっと触れる。初めての読者にとっては展開が速すぎると思うかもしれない。その場合は付録 B が役に立つであろう。

1.1　Olbers のパラドクス

1823 年、オランダ人天文学者の Olbers は深遠な疑問を投げかけた。

「宇宙が無限に広がっているならば、空のどこを見てもその先には星があるはずなのに、なぜ夜空は明るくないのだろうか？」

後で見るように、それは星は遠くにあるからではない。

太陽から距離 r だけ離れた所では、太陽からの光は面積 $4\pi r^2$ の球面上に等しく広がっている（図 1.1)。ここで太陽の光度を L とすると、太陽からのフラックス S は

$$S = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{1.1}$$

なので、$S \propto L/r^2$ である。一方太陽の直径を D とすると、視直径は

$$\theta \simeq \tan\theta = \frac{D}{r}$$

で与えられる（図 1.2)。ただし θ はラジアンで測り、十分に小さいとした。すると太陽の広がりは $(D/r)^2$ に比例するので、**表面輝度**（単位平方角あたりのフラックス）は

$$\frac{L/(4\pi r^2)}{(D/r)^2} \propto \frac{L}{D^2}$$

に比例し、r に依存しないことが分かる。したがって太陽と同じような光度や直径をもつ星は同じような表面輝度をもつことになるので、夜空のどこを見ても星があるのであれば、全天は太陽と同じくらい明るくなるはずである。

1.2　Olbers のパラドクスの別表現

Olber のパラドクスを別の形で表現してみよう。いま宇宙は一様等方であり、その中に単位体積あたり ρ 個の星があるとする。このとき、S から $S + \mathrm{d}S$ の範囲のフラックスをもつ星はどのくらいあるのだろうか？　まずすべての星はどれも同じものであり、どれも光度 L をもつとする。ここで半径 r、厚さ $\mathrm{d}r$ の球殻を考えよう（図 1.3)。この球殻の体積は $4\pi r^2$ なので、この内部に含まれる星の個数は

$$\mathrm{d}N = \rho \times 4\pi r^2 \mathrm{d}r \propto \rho r^2 \mathrm{d}r \tag{1.2}$$

で表される。ここで式 (1.1) を思い出すと

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} \propto r^{-3}$$

なので、フラックス S-$S+\mathrm{d}S$ をもつ星の個数は

$$\mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}S = \rho r^2 \cdot \frac{r^3}{L} \cdot \mathrm{d}S = r^5 \mathrm{d}S \tag{1.3}$$

である。星の光度はどれも L なので式 (1.1) よりフラックスと半径は 1 対 1 に対応するため、式 (1.3) の $\mathrm{d}N$ は式 (1.2) の $\mathrm{d}N$ と同じものである。

最後の結果は $\mathrm{d}N/\mathrm{d}S \propto r^5$ と書き換えられ、式 (1.1) より

$$r = \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{1/2} \propto S^{-1/2}$$

なので、

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S} \propto r^5 \propto S^{-5/2} \tag{1.4}$$

という**冪乗則**が成立する。このような量は宇宙論では **number counts** や **source counts** と呼ばれ、重要な役割を果たす。ただし $\mathrm{d}N/\mathrm{d}S$ は $\mathrm{d}S$ の範囲にある星の個数であり、S を変えたときの N の変化ではないことに注意しよう。

上ではどの星も同一のものと仮定していたが、いま i 番目のグループの個数密度を ρ_i、光度を L_i とする ($i = 1,\ 2,\ \ldots$)。それぞれのグループの number counts は $\mathrm{d}N_i/\mathrm{d}S = k_i S^{-5/2}$ (k_iは比例定数) なので、全体の number counts も

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S} = \sum_i \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}S} = \sum_i k_i S^{-5/2} = S^{-5/2} \sum_i k_i \propto S^{-5/2}$$

となって同じ冪乗則に従う。したがって一様等方な星の集団は必ず同じ $-5/2$ 乗則に従うが、ここから大きな問題が出てくる。すなわち、S_0 より明るい星の全フラックスが

$$S_{\mathrm{total}} = \int S \mathrm{d}N = \int_{S_0}^{\infty} S \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S} \mathrm{d}S \propto \int_{S_0}^{\infty} S^{-3/2} \mathrm{d}S \propto {S_0}^{-1/2}$$

となって、$S_0 \to 0$ で $+\infty$ に発散してしまう。つまり夜空は限りなく明るいことになってしまうのである！

問 1.1　1.1 節では一様等方な宇宙は太陽と似た表面輝度をもつことを導いた。次に 1.2 節では空は限りなく明るいことを導いた。これらはどちらも計算に誤りはなく、どちらも正しい。では何が違うのだろうか？

解答　1.1 節では空のどの方向を見ても星があると仮定していたが、これは星が不透明であることを意味している。一方 1.2 節では $S_0 \to 0$ の極限をとっているが、これは星が存在しない（もしくは透明である）ことを意味している。結果の違いはこの仮定の違いが原因である。■

実際は夜空は太陽の明るさには程遠く、限りなく明るいことなどありえない。ではこの矛盾はどのように説明すればよいのだろうか？　これは宇宙が不透明だからではないし—実際宇宙は可視で驚くほど透明である—、星は有限の時間しか生きられないからでもない—有限しか生きられなくても空から星がなくなる訳ではない—。

答えの一つは、宇宙年齢が有限だということである。しかしもう一つの答えは、宇宙が静的でも平坦でもなく、我々はむしろ曲がった、膨張している時空の中に住んでいるということである。

1.3　計量—くるみの中の宇宙

非常に尊大ではあるが、宇宙の幾何学をたった一つの式で表現できないだろうか？　それを実現するために、まずはいくつか復習をしよう。3 次元空間において $(\delta x,\ \delta y,\ \delta z)$ だけ離れている 2 点間の距離 δL は、Pythagoras の定理より

$$(\delta L)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2$$

で与えられる。非相対論的な物理ではある観測者が距離を δL と読むと、他の観測者も自身の運動に関係なく、その距離を δL と読む。これは時間についても同じであり、時間 δt はすべての観測者に対して同一である。基礎物理の目標は宇宙の運動を観測者に依存しない方法で記述することであり、この重要な量は**不変量**と呼ばれる。ゆえに物理法則は宇宙で共通なのであり、場所によって異なる法則はそもそも法則ではない。また物理量は、それが保存されるという事実に基づいて存在する。

そうは言っても、すべてにおいて一貫している理論は現在のところ見つかっていない。例えばミクロな世界を記述する量子力学は、マクロな世界の一般相対論と矛盾している。そこでとりあえず不変に見える量に基づいて、宇宙の骨組みを見ていくことにしよう。

特殊相対論においては、空間の距離も時間も不変量ではない。不変なのは、それらを組み合わせた

$$(\delta s)^2 = (c\delta t)^2 - (\delta x)^2 - (\delta y)^2 - (\delta z)^2 \tag{1.5}$$

という量である（c は光速度）。この係数 $(+1,\ -1,\ -1,\ -1)$ を**計量係数**といい、後に**計量テンソル**の基になる[*1]。

特殊相対論の計量からは、時間の遅れ、Lorentz 収縮、Lorentz 変換や同時性の破れなどのよく親しまれた結果が得られる。自由粒子は s が最大になるような経路に沿って動くが、これを**測地線**という。

例題 1.1　(1) 時計の 2 つの秒針が、時計自身から見て $(\delta t,\ 0,\ 0,\ 0)$ ($\delta t = 1$ 秒) の間隔で動いている。この時計が観測者に対して速度 v で走り、観測者には秒針どうしの間隔が $(\delta t',\ \delta x',\ \delta y',\ \delta z')$ に見えているとする。このとき

$$\delta t' = \gamma(v)\delta t, \qquad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

を示し、秒針間の時空距離 δs を求めよ。

(2) 時計をひもの先に括り付けて頭の周りに回すと、時計が 1 周するのに（時計から見て）0.5 秒かかったとする。このとき、時計の**世界線**に沿った時空距離の和を求めよ。ただし世界線とは、時空における物体の軌跡のことである。

解答　(1) 時計の運動の向きを x 軸にとると、$\delta y' = \delta z' = 0,\ v = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ である。時空距離 δs は座標系によらず $\delta s = \delta s'$ であるから

$$(c\delta t)^2 = (c\delta t')^2 - (\delta x')^2$$

となり、両辺を $(c\delta t')^2$ で割って

$$\left(\frac{\delta t}{\delta t'}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\delta x'}{c\delta t'}\right)^2 \longrightarrow 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

を得る。したがって

$$\delta t' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \delta t = \gamma(v)\delta t$$

となる。また時空距離は $\delta s = c\delta t = \underline{c}$ である。この結果から、時計は $\delta t = 1$ 秒 を刻んでいても、相対的に動いている観測者には $\delta t' = \gamma(v)\delta t > 1$ 秒 に見えることが分かる。これがいわゆる「時間の遅れ」である。■

(2) $\delta s = c\delta\tau$ と書くとき、$\delta\tau$ を**固有時間**という。$\delta\tau$ はここでは時計が測った時間のことであり、これも座標系によらず不変である。いま $\delta\tau = 0.5$ 秒 なので、全時空距離は $\delta s = c\delta\tau = 0.5c$ となる。ただし時計を振り回すと時計は加速度をもつが、それでも $\delta s = c\delta\tau$ は成り立つので、結局 $\underline{0.5c}$ が答えである。

例題 1.2　光線上の任意の 2 点間の時空距離を求めよ。それは宇宙の**因果律**とどのような関係があるか？　（ヒント：もし事象が c よりも速い信号でのみつながっているのならば、お互いに関与することはできない。）

解答　光線を x 軸上にとると、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = c$ より

$$(\delta s)^2 = (c\delta t)^2 - (\delta x)^2 = (\delta t)^2\left[c^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = 0$$

より $\underline{\delta s = 0}$ である。これと因果律との関係は図 1.4 のような**光円錐**を考えるとよい。原点にいる事象は、c 以下の速さで未来の任意の事象に信号を送ることができる。同様に、原点の事象は過去の任意の事象から影響を受ける。このような場合の時空距離は（上の式で $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < c$ より）$(\delta s)^2 > 0$ を満たし、**時間的**という。一方、光円錐の外側にいる事象

[*1] ここでは原文に合わせて $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,\ -,1\ -1,\ -1)$ を採用する。

は原点の事象に影響を与えることも、影響されることもできない。このような場合の時空距離は $(\delta s)^2 < 0$ であり、**空間的**という。光円錐の上の事象は $\delta s = 0$ であり、**null** という。■

問 1.2　最高エネルギーの宇宙線は $\geq 10^{20}$ eV のエネルギーをもち、その大部分は静止質量 938.28 MeV/c^2 の陽子である。銀河系の直径をおよそ 10^5 ly として、最高エネルギー宇宙線が銀河系を渡り終えるのにかかる時間を求めよ。（ヒント：eV $\leftrightarrow$ J の変換、ly $\leftrightarrow$ m の変換は知らなくてもよい。）

解答　陽子の静止質量を m、速度を v、エネルギーを E とすると、特殊相対論より

$$E = \gamma mc^2, \qquad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

であった。問題設定より

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{10^20 \text{ eV}}{939.28 \times 10^6 \text{ eV}} \sim 10^{11} \gg 1$$

なので、$v/c \sim 1$ より $v \sim c$ が分かる。したがって銀河系から見ると陽子はほとんど光速で動き、銀河系を $\underline{\sim 10^5 \text{ 年}}$ で横断する。一方陽子の重心系では時計の進みが γ の割合で遅れるので、

$$\frac{10^5}{\gamma} \text{ yr} = 10^{-6} \text{ yr} \underline{\sim 30 \text{ s}}$$

しかかからない。

膨張する宇宙を記述するためには、計量係数を

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - R(t)^2(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)$$

のように修正すればよい。ここに $R(t)$ は**スケール因子**といい、時刻 t における宇宙の相対的な大きさを表す（図 1.6）。より一般に、平坦とは限らない一様等方な宇宙の計量は

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - R(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{1.6}$$

で与えられる。ただし k は宇宙が平坦（曲率が 0）なとき 0、球状（曲率が正；**閉じている**）のとき +1、双曲面状（曲率が負；**開いている**）のとき -1 をとる。（k はこの 3 つ以外の値はとらない。例えば $k=-3$ としても、$r' = \sqrt{3}\,r,\ R' = R/\sqrt{3}$ とすることで $k=-1$ の場合と同じ形の式に直すことができるため。）図 1.7 は $k = +1,\ 0,\ -1$ のときの曲面を図示したものである。この 2 次元曲面は状況を簡単化しすぎているという反対もあるだろうが、物理学（特に一般相対論）では物事を可視化するよりも数学的に記述するほうが簡単である。物理学は豊かな想像力を必要とするが、人間の脳には曲がった時空を思い浮かべる機能はないのであろう。

式 (1.6) は **Robertson-Walker 計量**もしくは **Friedmann-Robertson-Walker 計量（FRW 計量）**として知られている[*2]。この計量は一様等方なので、時空内のいずれの点も原点 $\boldsymbol{r} = 0$ に選ぶことができる。また時刻 t は**座標時間**とか**宇宙時間**とか言うことがある。この計量はふつう宇宙の膨張が等方な慣性系を選び、$t,\ r,\ \theta,\ \phi$ はこのような座標系で測られる。このような座標系は**宇宙静止系**と呼ばれ、宇宙背景輻射と同じ慣性系である。宇宙静止系に対して動いている観測者からは、宇宙膨張は等方に見えない（実際背景輻射は地球の自転のために dipole が見える；p.42 の図 2.2）。

式 (1.6) は宇宙をたった 1 行で表そうという尊大な試みであり、今後何度も登場することになる。

ここで Robertson-Walker 計量に対するよくある誤解をまとめておこう。

Q. 宇宙が膨張しているのに、なぜ私の背は高くならないの？

　A. 頭と足は離れていないから。体は化学結合でくっついている。

Q. 宇宙が膨張しているなら、地球は太陽から離れていくのでは？

[*2] Lemaitre を加えて LRLW 計量とも言う。

A. 式 (1.6) は正確に一様等方な宇宙についての式であることに注意。これは局所的には明らかに正しくない。太陽系では太陽からの重力のために、Robertson-Walker 計量は成り立たない。式 (1.6) は大きなスケールほど正確になるが、小さなスケールほど色々な構造が見られる。第 4 章で密度ゆらぎから宇宙の構造ができることを学ぶが、そこで地球は宇宙膨張に引っ張られることはなく、太陽からの引力の方が遥かに強い ことが分かる。

Q. 宇宙はどこに向かって膨張している？

A. 一般相対論において、時空に固有の曲率は測地線を用いて時空内で測定される。すなわち時空の曲率を述べるために、より高い次元の話を持ち出さなくて済む。しかしより高い次元のことを考えなくてもよく、何の影響もないのであれば、そのような次元のことを仮定する必要はあるのだろうか？　どのような場合においても高次元の空間が平坦だと信じる理由はどこにもない。したがって宇宙が「何か」に向かって膨張しているという証拠は何もなく、宇宙は単に膨張しているだけである。

Q. 宇宙の中心はどこか？

A. これは Lemaitre の時代からよくある誤解である。宇宙の膨張はよく風船の膨らみになぞらえて説明されるが（図 1.8)、その座標は時間的でなく空間的だということに注意。膨張はある点から始まったが、これは 時間の始まりであって、どこかの場所を指しているわけではない。ゆえに宇宙の膨張はすべての場所で始まったと言ってよい。また宇宙が双曲面的であるならば宇宙は無限大であるが、それが正しければ(?)宇宙のごく初期のどの領域でも内側よりも外側の方が無限に多くの物質を持っていることになる。

Q. ビッグバンのとき、何が宇宙を膨張させたのか？

A. この疑問は宇宙に入ってきたエネルギーが静止していた物質を広げたことを示唆するが、これは一般相対論における場の方程式（**Einstein 方程式**）[*2] とは関係がない。少なくとも古典的には、Einstein 方程式における初期条件だというのが答えになるが、「そうやって始まったからだ」と言うのは明らかに満足のいく答えではない。この最初の膨張を説明してくれるのは**インフレーション理論**である。

式 (1.6) は宇宙膨張が等方であるような慣性系を定義していることに注意しよう。後に見るように、これは銀河の分布や宇宙背景輻射によって裏付けされている。しかし、特別な慣性系はないという Einstein 方程式と矛盾しないような宇宙を考えることはできないのだろうか？　一つの答えは**フラクタル構造**であるが、これは後でインフレーションを扱うときに出てくる。

一般相対論における場の方程式は k や $R(t)$ を決定する。具体的には

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}})R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3}, \tag{1.7}$$

$$\ddot{R}^2 = -4\pi G\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \frac{3p}{c^2}\right)\frac{R}{3} + \frac{\Lambda c^2 R}{3} \tag{1.8}$$

である。これら 2 式を **Friedmann 方程式**という。ここに ρ_{m} は宇宙にある物質の質量密度、ρ_{r} は輻射に対応する質量密度（エネルギー密度を変換する)、G は万有引力定数、p は物質と輻射の圧力、R はスケール因子であり、$\rho,\ p,\ R$ は時間の関数である。$\Lambda > 0$ は Einstein 方程式で有名な**宇宙定数**であり、宇宙が膨張する傾向を表している（$\Lambda < 0$ では宇宙は収縮する)。簡単な例を挙げると、$k = \Lambda = 0$ のとき、物質優勢の宇宙では $R(t) \propto t^{2/3}$（問 1.4)、輻射優勢の宇宙では $R(t) \propto t^{1/2}$ である。

式 (1.8) は式 (1.7) の両辺を微分すると導ける。両辺を微分すると $d(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}})/\mathrm{d}t$ を含む項が出てくるが、この計算には宇宙をガスの集まりと考え、エネルギー保存則を用いればよい。具体的にはエネルギー密度の変化 $d[(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}})c^2R^3]$ がガスの仕事 $-pdV$ に等しいので、

$$\frac{\mathrm{d}[(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}})c^2R^3]}{\mathrm{d}t} = -p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

である。（一般相対論においては仕事が何に対してなされたかが明らかでないので、ガスの仕事の扱いは微妙である。し

[*2] 次の式のこと：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}.$$

かし厳密に計算しても上と同じ結果が得られる。）

問題 1.3　エネルギー保存則を用いて、式 (1.7) から式 (1.8) を導け。

解答　式 (1.7) の両辺を t で微分すると、左辺は $2\dot{R}\ddot{R}$、右辺は上の式より

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\text{右辺})}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{8\pi G}{3c^2}\frac{1}{R}(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})c^2R^3 - kc^2 + \frac{\Lambda c^2R^2}{3}\right] \\
&= \frac{8\pi G}{3c^2}\left[-\frac{\dot{R}}{R^2}(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})c^2R^3 + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}[(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})c^2R^3]}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{2\Lambda c^2R\dot{R}}{3} \\
&= -\frac{8\pi G}{3c^2}\left[(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})c^2R\dot{R} + \frac{3p}{R}\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{2\Lambda c^2R\dot{R}}{3} \\
&= -\frac{8\pi G}{3c^2}\left[(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})c^2 + 3p\right]R\dot{R} + \frac{2\Lambda c^2R\dot{R}}{3}
\end{aligned}$$

となる。したがって両辺を $2\dot{R}$ で割れば、

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r}+\frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{\Lambda c^2R}{3} \tag{1.8}$$

を得る。■

以下の数節では Olbers のパラドクスに戻る前に、膨張宇宙モデルの驚くべき側面を探っていこう。

1.4　赤方偏移と時間の遅れ

2 個の光子がスケール因子 R_1 の時刻 t_1 において δt の間隔を空けて放出され、スケール因子 R_0 の現在 t_0 に地球に到達したとする。2 つの光子の距離は放出されたときには $c\delta t$ であったが、現在は $c\delta t \times (R_0/R_1)$ となるので、その距離は宇宙膨張によって R_0/R_1 倍に引き伸ばされたことになる。また 2 つ目の光子は 1 つ目の光子より $(R_0/R_1)\delta t$ だけ遅れて地球に到達する。これより Robertson-Walker 宇宙における 2 つの時計は R_0/R_1 の分だけずれることになり、これは**宇宙時間の遅れ**とも呼ばれる。ここで無次元化されたスケール因子を

$$a = \frac{R_1}{R_0} \tag{1.9}$$

で定義しておこう。これは R_1 を変化させたとき、$a = 1$ で現在を、$a < 1$ で過去を表す。

光子自身にも同様の議論が適用できる。ここでは光子を波として扱うと、2 つの波のピークの間隔は同じ R_0/R_1 の分だけ広がる。したがって波長は長くなり、赤い方へずれる。このずれを**赤方偏移** z といい、

$$1 + z = \frac{R_0}{R_1} = \frac{1}{a} = \frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_\mathrm{emitted}} \tag{1.10}$$

によって定義する。ここに λ_obs は地球で観測される光子の波長であり、λ_emitted は光子が放射されたときの元々の波長である。式 (1.10) は

$$z = \frac{\lambda_\mathrm{obs} - \lambda_\mathrm{emitted}}{\lambda_\mathrm{emitted}} \tag{1.11}$$

とも書かれる。

赤方偏移が大きいと、光が放射された後に膨張率が大きく増加することを意味している。後退している天体からの光は Doppler 効果により赤い方にずれるので、赤方偏移は後退とよく混同される。実際、銀河は互いに静止してはおらず、互いにの速度で運動している。これは天文学では**固有運動**として知られ、Doppler 効果によって波長がずれる元になる。しかしながら $\gtrsim 100$ Mpc の領域では宇宙論的な赤方偏移が優勢になるので、Doppler 効果と宇宙膨張による赤方偏移を混同してはならない。我々と銀河は互いに離れていっているが、これは銀河が平坦で膨張していない宇宙において我々から遠ざかっている訳ではない。

Robertson-Walker モデルの別の案としては、1929 年に Zwicky が「疲れた光」宇宙を提案した。このモデルでの赤方偏移は、光子が地球まで飛んでくる過程で物質との相互作用でエネルギーを段々と失っていくことで発生する。このモデ

ルにでは再現できない観測結果は数多くあったが、特に宇宙時間の遅れの実験的な検出によってこの節は受け入れられなくなった。図 1.9 は超新星の光度曲線の落ち方を z の関数として描いたものであるが、この結果は赤方偏移の理論通り、$1+z$ の時間の遅れと一致している。

しかし z を測定するためには、$\lambda_{\mathrm{emitted}}$ を知らねばならない。これは原子や分子が特定の励起エネルギーで遷移し、特定の波長で吸収線や輝線をもつことを利用して行われる。もし遠方の天体における遷移を特定できれば、原子は宇宙初期においても今と同じように振舞っていたはずであるから、$\lambda_{\mathrm{emitted}}$ を知ることができる。

しかし宇宙初期と現在で本当に違いはないのだろうか？　そして違いがあれば、どうやって z を求めればよいのだろうか？　幸い原子や分子の特徴的な遷移は高 z においても簡単に見られ（図 1.10）、現在との違いは非常に小さいことが分かっている。仮に電磁相互作用の強さが宇宙初期には今とは違っていたとすると、微細構造定数 α は我々の知っている値とは異なっていただろう。微細構造線の間の $\delta\lambda/\lambda$ の微小な違いは α^2 に比例するので、α の違いは遠方にある天体からの波長のずれに現れる。

現在までの地上実験では、宇宙初期における遷移の違いは検出されていない。α の違いを検出したという主張もいくつかあるが、他の実験で検証されてはいないし、実験は難しく系統誤差が大きいことも明らかである。地上実験の結果は $\dot{\alpha}/\alpha = (-2.6 \pm 3.9) \times 10^{-16}$ /yr であるが、これは α がまったく変化していないことと同値である。しかしながら、今後の宇宙論的な実験によりの変化が検出される可能性はある。超対称性理論[*4]や M 理論[*5]といった未完成の理論によれば、α は変化してもよいことになっている。しかしこれらの理論も、赤方偏移と一致するような α の変化を予言している訳ではない。

1.5　宇宙論的パラメータ

宇宙はどれくらいの速さで膨張しているのだろうか？

我々と遠くにある銀河との間の距離を、現在のスケール因子 R を用いて $\ell = D \times R$ とおく（D は適当な定数）。この両辺を t で微分すると、ℓ は宇宙膨張によって

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = D\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \ell \times \frac{\dot{R}}{R} = \ell \times H$$

の割合で変化することが分かる。ここに

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{1.12}$$

は **Hubble パラメータ**であり、現在の値は H_0 である。$d\ell/\mathrm{d}t$ を見かけの後退速度 v と見なせば

$$v = \ell \times H \tag{1.13}$$

であるが、銀河は実際に後退している訳ではなかったことを思い出そう。この銀河の見かけ上の後退は **Hubble flow** と呼ばれることがある。

H はよく **Hubble 定数**と呼ばれている。H は我々の生きている時間の中では一定に見えるが、宇宙が誕生してからずっと一定だった訳ではないことに注意しよう。H_0 は現在の宇宙の膨張率を表している値でもあり、その大きさは

$$H_0 = 72 \pm 3 \text{ km/s/Mpc} = 2 \times 10^{-18} \text{ /s}$$

である。これは

$$H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}, \qquad h = 0.72 \pm 0.03$$

とも書かれる。これは遠回りな書き方に見えるかもしれないが、Hubble 定数は宇宙論のもっとも基本的な量なので、宇宙論学者は好んで h を使う。

ここで式 (1.7) の両辺を R^2 で割ると、

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}})}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \tag{1.14}$$

[*4] 既知の Boson と Fermion に対して、それぞれ対応する Fermion と Boson（超対称性粒子）が存在すると考える理論。
[*5] 既知の 5 つの超弦理論を統合してできる、11 次元（空間次元 10 個 + 時間次元 1 個）の理論。ともに Wikipedia より。

を得る。この右辺は宇宙膨張を表している。宇宙論では

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{8\pi G\rho_\mathrm{m}}{3H^2}, \qquad \text{物質} \tag{1.15}$$

$$\Omega_\mathrm{r} = \frac{8\pi G\rho_\mathrm{r}}{3H^2}, \qquad \text{輻射} \tag{1.16}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \qquad \text{ダークエネルギー} \tag{1.17}$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R^2H^2} \qquad \text{宇宙の非平坦性による、全割合の 1 からのずれ} \tag{1.18}$$

という量を定義して、式 (1.14) を

$$\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \tag{1.19}$$

と表すことが多い。

$$\Omega_\mathrm{total} = \Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k$$

という量を定義することもある。これらの**密度パラメータ**たちはいくつかの例外を除いて、ふつうは時刻 t の関数である。図 1.11 は宇宙のスケール因子による Ω の変化を示している。Hubble 定数と同じように、現在の Ω の値には添え字 0 を付ける。

また、**臨界密度**

$$\rho_\mathrm{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{1.21}$$

を定義して

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{\rho_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{crit}} \tag{1.20}$$

のような表現をしてもよい（どこが「臨界」なのかは後で説明する）。質量密度はよく臨界密度との比の形で表される。例えば、宇宙のバリオン密度 ρ_b は

$$\Omega_\mathrm{b} = \frac{\rho_\mathrm{b}}{\rho_\mathrm{crit}} \tag{1.22}$$

の形で書かれる。また宇宙の質量密度は

$$\rho_\mathrm{m} = \Omega_\mathrm{m}\rho_\mathrm{crit} = 1.8789\times10^{-26}\Omega_\mathrm{m}h^2\ \mathrm{kg/m^3} = 2.7752\times10^{11}\Omega_\mathrm{m}h^2\ M_\odot/\mathrm{Mpc}^3 \tag{1.23}$$

である（1 $M_\odot$ は太陽の質量）。

後の章で見るが、宇宙の物質の大部分は光を吸収も放射もしない**ダークマター**である。ダークマターは重力だけで相互作用し、現在までの観測結果も重力効果を通して得られたもののみである。

WMAP 衛星により得られている現在の Ω たちの実験値は

$$\Omega_{\mathrm{m},0}h^2 = 0.1326 \pm 0.0063, \qquad \text{物質：}\mathbf{0.26} \tag{1.24}$$

$$\Omega_{\mathrm{r},0} \simeq 4.2\times10^{-5}, \qquad \text{輻射：}\mathbf{0} \tag{1.27}$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030, \qquad \text{ダークエネルギー：}\mathbf{0.74} \tag{1.25}$$

$$\Omega_{\mathrm{b},0}h^2 = (2.273 \pm 0.062)\times10^{-2} \qquad \text{バリオン：}\mathbf{0.04}\ \text{（ダークマター：}\mathbf{0.22}\text{）} \tag{1.26}$$

である。特に $\Omega_{\mathrm{r},0}$ の値は無視できるほど小さく、この本ではふつう 0 として扱う。また WMAP 衛星はの $\Omega_{\mathrm{m},0}$ 値そのものを制限しているのではなく、あくまでも $\Omega_{\mathrm{m},0}h^2$ を指定しているだけだということに注意しよう。

〈今回のまとめ〉

・**Olbers** のパラドクス：一様等方な宇宙を仮定すると、夜空は太陽程度か無限大の明るさをもつ。解決は後で。

・**Robertson-Walker** 計量：

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - R(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{1.6}$$

$R(t)$ はスケール因子；k は宇宙の曲率が 0（平坦）なとき 0、曲率が正（閉じている）のとき $+1$、曲率が負（開いている）のとき -1。

・**Friedmann** 方程式：

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3}, \tag{1.7}$$

$$\ddot{R}^2 = -4\pi G\left(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r}+\frac{3p}{c^2}\right)\frac{R}{3} + \frac{\Lambda c^2 R}{3} \tag{1.8}$$

これは宇宙の膨張を表す。Λ は宇宙定数（万有斥力に相当する）。

・赤方偏移：

$$1+z = \frac{R_0}{R} = \frac{1}{a} = \frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_\mathrm{emitted}} \qquad \text{または} \qquad z = \frac{\lambda_\mathrm{obs}-\lambda_\mathrm{emitted}}{\lambda_\mathrm{emitted}} \tag{1.10, 1.11}$$

ただし、$a = R/R_0$ は無次元化されたスケール因子；添字 0 は現在の値。赤方偏移と Doppler shift は別物！

・**Hubble** パラメータ：

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{1.12}$$

現在の値は $h = 0.72 \pm 0.03$ として $H_0 = 100h$ km/s/Mpc。これを用いると、距離 ℓ にある銀河の “後退” 速度は

$$v = \ell \times H, \tag{1.13}$$

式 (1.7) の宇宙膨張は

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi(\rho_\mathrm{m}+\rho_\mathrm{r})}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2}. \tag{1.14}$$

・密度パラメータ：

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{8\pi G\rho_\mathrm{m}}{3H^2}, \qquad \text{物質} \tag{1.15}$$

$$\Omega_\mathrm{r} = \frac{8\pi G\rho_\mathrm{r}}{3H^2}, \qquad \text{輻射} \tag{1.16}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \qquad \text{ダークエネルギー} \tag{1.17}$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R^2H^2} \qquad \text{宇宙の非平坦性} \tag{1.18}$$

を用いると、式 (1.14) は

$$\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \tag{1.19}$$

観測値は

$$\Omega_{\mathrm{m},0}h^2 = 0.1326 \pm 0.0063, \qquad \text{物質：}\mathbf{0.26} \tag{1.24}$$

$$\Omega_{\mathrm{r},0} \simeq 4.2 \times 10^{-5}, \qquad \text{輻射：}\mathbf{0} \tag{1.27}$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030, \qquad \text{ダークエネルギー：}\mathbf{0.74} \tag{1.25}$$

$$\Omega_{\mathrm{b},0}h^2 = (2.273 \pm 0.062) \times 10^{-2} \qquad \text{バリオン：}\mathbf{0.04}\ \text{（ダークマター：}\mathbf{0.22}\text{）} \tag{1.26}$$

〈単語リスト〉

p.13

- hubris「尊大さ」
- hypotenuse「斜辺」
- in the first place「そもそも」

p.15

- causality「因果律」

p.17

- of which more later = of which (there will be) more later (in this book)
- hubristic「思い上がった」 → hubris (n.)

p.18

- primeval「原始の」
- fling「〜を投げ捨てる、投げ飛ばす」 → fling apart「〜を広げる」
- arguably「ほぼ間違いなく」

p.19

- dilation「拡張」 → dilate (v.)

p.20

- swamp「〜を水没させる；圧倒する」
- untenable「批判に耐え得ない、擁護できない」 ↔ tenable

p.21

- corroborate「〜を補強する、裏付ける」　cf. collaborate

p.23

- deliberately「わざと」 → deliberate (v.)(adj.)
- obtuse「（理解が）鈍い；鈍角の」
- as with「〜と同様に」