

Observational Cosmology

Stephen Serjeant

東京大学理学部天文学科 4 年
安藤 亮

平成 26 年 5 月 15 日

4 The distant optical Universe

4.3 Population synthesis

銀河における光度の変化を考慮することは、faint blue galaxies problem を解決する一助となるが、ではそもそも銀河がどのように進化していくのかを予測することは可能であろうか。銀河から届く可視光の大部分は星から発されるものである。恒星の進化に関しては、主系列星や赤色巨星分枝、超巨星、さらには白色矮星、中性子星、ブラックホールなど、すでに多くの理論が確率されていることから、銀河の初期条件を与えれば、その銀河の色や光度がどのように変化していくかを考えることができる。

この方法は種族合成 (population synthesis) と呼ばれ、これを用いるのにはいくつかの仮定をおく必要がある。例えば、星形成が現在も継続しているかあるいは一回のバーストによるものなのか、初期質量関数 (initial mass function, IMF) ¹ はどのようなか、あるいはダストがどのような影響を及ぼしているかなどである。天文学におけるダストは、赤色巨星の恒星風や超新星爆発によって形成され、グラファイトやシリケートから成る微粒子であり、その大きさは $1 \mu\text{m}$ 程度から原子数個分まで様々である。大きな星間物質の微粒子は太陽系を通過することもあり、地球の高層大気中で見つかることもある。このダストは、原始惑星系円盤や彗星、さらには惑星を構成する物質でもある。

種族合成モデルでは、単位時間あたりの星形成量も重要な条件である。場合によって、初期のスターバーストが仮定されたり、銀河衝突の確率から銀河内の星形成の歴史を予測することもなされる。仮に星形成が起こらなければ、銀河の色の変化は純粋に星の進化のみに依り、² これにより銀河の色は時代を追って赤く、暗くなるはずである。

初期質量関数 (IMF) は観測的宇宙論における重要な未知の要素である。単位質量あたりの初期の星の数 $\frac{dN}{dm}$ は、 $0.1M_{\odot} \leq m \leq 100M_{\odot}$ 程度の範囲で $\frac{dN}{dm} \propto m^{-2.35}$ と仮定され、これは現在の銀河系における質量分布から示唆される結果と一致する。しかしながら、IMF が銀河の内部の場所によって異なるのか否かは定かではない。銀河の星形成率を見積もる際には、その推定は大部分の大質量星からの光に依存してしまうが、実際に形成されている星全体の数を求めるには、大質量星だけでなく小質量の星の分まで外挿する必要があり、この結果により IMF の形状は大きく左右される。

¹ 銀河の初期条件として星の分布がどのようなであったのかを表す。

² passive stellar evolution と呼ばれる。

ダストによる赤化もまた未知の領域が多い。ダストは赤色と比べて青色の光を吸収しやすい傾向にあり、ダストの奥側にある星の色 (B-V) を $E(B-V)$ だけ変えてしまう。これより観測される星の色 $(B-V)_{\text{obs}}$ は、本来の色 $(B-V)_{\text{true}}$ に対して

$$(B-V)_{\text{obs}} = (B-V)_{\text{true}} + E(B-V) \quad (1)$$

という補正を受ける。

Exercise 4.3

$(B-V) = 0$ と $(B-V) = 1$ とではどちらが赤いのであろうか。 $(B-V)$ は B バンドと V バンドでの等級の差であり、それぞれの等級は各バンドでのフラックス S_B, S_V を用いて

$$m_B = -2.5 \log_{10} S_B + \text{const.} \quad (2)$$

$$m_V = -2.5 \log_{10} S_V + \text{const.} \quad (3)$$

と表されるので、辺々引けば

$$(B-V) = m_B - m_V = m_B - m_V = -2.5 \log_{10} \left(\frac{S_B}{S_V} \right) + \text{const.} \quad (4)$$

$(B-V) = 0$ 及び $(B-V) = 1$ の場合のフラックスの比を $\left(\frac{S_B}{S_V} \right)_0, \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_1$ と表すならば、

$$\begin{aligned} 0 - 1 &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_0 - \left[-2.5 \log_{10} \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_1 \right] \\ 0.4 &= \log_{10} \left[\left(\frac{S_B}{S_V} \right)_0 / \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_1 \right] \\ \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_0 / \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_1 &= 10^{0.4} \simeq 2.5 \\ \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_0 &\simeq 2.5 \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_1 \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。これより

$$\left(\frac{S_B}{S_V} \right)_0 > \left(\frac{S_B}{S_V} \right)_1 \quad (6)$$

である。 $\frac{S_B}{S_V}$ の値が小さいほど色が赤いことを表しているので、この場合は $(B-V) = 1$ のときの方が赤いといえる。

星の手前側にダストの層があるとすると、V バンドでの減光 A_V は赤化を表す因子 $E(B-V)$ を用いて

$$A_V = R_V E(B-V) \quad (7)$$

と表される。ここで R_V はダストの組成によって決まる定数である。銀河系内の典型的なダストでは $R_V = 3.1$ であるが、2.75 から 5.3 程度の幅をとりうる。他の波長においても、含まれる重元素の割合などダストの組成によって、ダストの吸光の様相は変化する。217.5 nm での吸収ピークもダストの組成によるもので、これはグラファイトの微粒子に起因している。

ダストによる減光を測る一つの手法として、Balmer 透減率が挙げられる。水素の Balmer 系列のうち $H\alpha$ 線 (656.3 nm) と $H\beta$ 線 (486.1 nm) は、高温の星によって電離されたガスから放出されるもので、その輝線強度比は原子核物理から導出される特定の値をとる。 $H\alpha$ 線光子の光学的厚みを $\tau_{H\alpha}$ とすると、 $H\alpha$ 線のフラックスには減光のファクター $e^{\tau_{H\alpha}}$ がかかる。このとき光学的厚みは $\tau_{H\alpha} \simeq 0.7A_V$ という関係を満たす³。一方、 $H\beta$ 線の減光と光学的厚みはこれより大きく、銀河系のダストでは $\tau_{H\beta} \simeq 1.45\tau_{H\alpha}$ である。観測された $H\alpha$ 線と $H\beta$ 線のフラックスの比 $\frac{S_{H\alpha}}{S_{H\beta}}$ を、理論値 2.8 と比較することにより、 $\tau_{H\alpha}$ と A_V を求めることができる。この減光はガスの柱密度とも関係している。またダストの種類だけでなく、ダストの位置もまた届く光の色に影響を与える (Exercise 4.4)。

ダストの光学的厚みは波長によっても異なり、実際に $H\alpha$ 線の光学的厚みは $H\beta$ 線や紫外線よりも薄くなっている。しかしながら、我々が観測する光はほとんどが $\tau < 1$ であるような領域からのものであり、観測波長が短ければ短いほど、見える領域は光学的により薄い領域になっていく。近年の種族合成法では、こうしたダストの位置や密度分布、組成の仮定を考慮に入れて行われている。

Exercise 4.4

上述の議論では、輝線を出すガスの手前側にダストの層がある状況を仮定していたが、今度はダストとガスとが一樣に混合されている場合を考える。まず、ダストと星とが視線方向に沿った散乱断面積 A 、長さ h の円柱の中に存在するとして、その円柱内で視線方向に x 軸をとる ($x = 0$ が円柱の手前側の端、 $x = h$ が奥側の端を表す)。このとき、無限小の厚さ dx の層の体積は $A dx$ で与えられる。考える体積が大きいほどより多くの星が存在しているはずなので、この無限小の層の光度を dL とすれば、定数 (光度密度) ρ を用いて

$$dL = \rho A dx \quad (8)$$

が成り立つ。円柱内の距離 x までの光学的厚みを $\tau(x)$ とすれば、この部分を通過する光は $e^{-\tau(x)}$ のファクターで表される減光を受ける。微小距離 δx に対応する減光のファクターは $e^{\delta\tau}$ であるはずなので、光学的厚み $\tau(x)$ は距離 x に比例するはずであり、これは

$$\tau = kx \quad (9)$$

(k は定数) と表現できる。これより、円柱の端から端までの光学的厚みは $\tau_{\text{total}} = kh$ となる。これを用いると、位置が x から $x + dx$ の部分に相当する薄い層から発せられる光の強さは、円柱内を通過して観測者に届くまでに $e^{-\tau(x)}$ 倍になり、その光度は

$$dL_d = dL \times e^{-\tau(x)} = \rho A e^{-kx} dx \quad (10)$$

と表される。これを $x = 0$ から $x = h$ までで積分すると、

$$L_d = \int_0^h \rho A e^{-kx} dx = -\frac{\rho A}{k} e^{-kx} \Big|_0^h = \frac{\rho A}{k} (1 - e^{-kh}) \quad (11)$$

が得られる。これはダストによる減光が存在する場合の円柱全体の光度を表している。一方ダストがない場合には、円柱全体の光度は $L_n = \rho A h$ となることから、両者の比をとると

$$\frac{L_d}{L_n} = \frac{\frac{\rho A}{k} (1 - e^{-kh})}{\rho A h} = \frac{1}{kh} (1 - e^{-kh}) \quad (12)$$

³等級はフラックスの対数であり、フラックスは $\tau_{H\alpha}$ の指数のファクターがかかっているため、 $\tau_{H\alpha}$ と A_V とには線形の関係が成り立つ。

となる。この比はダストによる減光の効果を表しており、散乱断面積 A と光度密度 ρ に依存しない。円柱状のガスとダストの雲が十分深い極限を考えると、 $1 - e^{-kh} \rightarrow 1$ から

$$\frac{L_d}{L_n} = \frac{1}{kh} \quad (13)$$

が成り立つ。

式 (13) から、 $H\alpha$ 線について

$$\frac{L_d(H\alpha)}{L_n(H\alpha)} = \frac{1}{k_{H\alpha}h} \quad (14)$$

が成り立つ。一方 $H\beta$ 線については、光学的厚みが $\tau_{H\beta} = 1.45\tau_{H\alpha}$ を満たすことから、 $k_{H\beta} = 1.45k_{H\alpha}$ であり、同様の比は

$$\frac{L_d(H\beta)}{L_n(H\beta)} = \frac{1}{k_{H\beta}h} = \frac{1}{1.45k_{H\alpha}h} = \frac{1}{1.45} \frac{L_d(H\alpha)}{L_n(H\alpha)} \quad (15)$$

と表され、これよりダストがある場合とない場合の 2 つの輝線の比について

$$\frac{L_d(H\alpha)}{L_d(H\beta)} = 1.45 \frac{L_n(H\alpha)}{L_n(H\beta)} \quad (16)$$

が成り立つことが分かる。この表式はガス・ダスト雲の深さ h に依存していないため、一般的に成り立つ関係式である。したがって、輝線を出すガスとダストとが混合されている場合には、その雲の深さに拘らず、また実際に観測される輝線強度がどんなに弱くとも、 $H\alpha$ 輝線と $H\beta$ 輝線の強度比には式 (16) の関係式が成り立つ。

次に、実際にはガスとダストが混合されているのに、誤ってガスの手前側にダストの層があるような状況を考えてしまった場合を考える。ダストが手前側のみにある場合、各輝線の強度は

$$L_d(H\alpha) = L_n(H\alpha)e^{-\tau_{H\alpha}} \quad (17)$$

$$L_d(H\beta) = L_n(H\beta)e^{-\tau_{H\beta}} = L_n(H\beta)e^{-1.45\tau_{H\alpha}} \quad (18)$$

と表されるので、この両辺の比をとると

$$\frac{L_d(H\alpha)}{L_d(H\beta)} = \frac{L_n(H\alpha)}{L_n(H\beta)} e^{0.45\tau_{H\alpha}} \quad (19)$$

が得られる。これを、ガスとダストが混合している場合の式 (16) と比較すると、

$$\begin{aligned} e^{0.45\tau_{H\alpha}} &= 1.45 \\ \tau_{H\alpha} &= \frac{1}{0.45} \ln 1.45 \simeq 0.83 \end{aligned} \quad (20)$$

となるが、ここで $\tau_{H\alpha}$ と V バンドでの減光 A_V との間には

$$\tau_{H\alpha} \simeq 0.7A_V \quad (21)$$

という関係が成り立つことから、

$$\begin{aligned} 0.7A_V &\simeq 0.83 \\ A_V &\simeq 1.2 \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。これより、実際はガスとダストとが混合された光学的に厚い雲を観測しているのに、ダストの層がガスの手前側にのみ存在していると誤って仮定した場合には、ガス・ダストの雲の端から端までの光学的厚み τ_{total} に拘らず、V バンドでの減光を一定値約 1.2 と仮定してしまっていることになる。

4.4 Photometric and spectroscopic redshifts

以上のような様々な効果によって銀河のスペクトルは複雑になってしまうが、逆にそのスペクトルから有益な情報を得ることもできる。例えば輝線の存在から、O型星やB型星などの若く高温の星や、活動銀河核からの輻射による電離が起こっていることを推測できる。青色のスペクトルは若く高温の星の存在を示し、逆に赤色のスペクトルからは古い星の存在を示唆される⁴。楕円銀河や渦巻銀河のバルジではこうした古い星のスペクトルが見られる一方、渦巻腕の青いスペクトルからは近年の星形成が示唆される。

輝線や吸収線は、その波長に $(1+z)$ のファクターが掛かることから、銀河の赤方偏移を求めるのに利用できる。観測している輝線が発された時の波長 λ_{em} を知るためには、それが何の輝線なのかを知る必要がある。これと観測された波長 λ_{obs} から、赤方偏移は

$$1+z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} \quad (23)$$

と求めることができる。何の輝線を観測しているのかについては、大抵の場合その特徴から判別できるが、必ずしも単独で識別可能であるというわけではない。

一つの方法は、2種類の輝線の波長比を用いるというものである。2つの輝線がそれぞれ波長 $\lambda_{\text{obs},1}$, $\lambda_{\text{obs},2}$ で観測されたとすると、両者が同じ赤方偏移を有しているとすれば、観測波長の比は

$$\frac{\lambda_{\text{obs},1}}{\lambda_{\text{obs},2}} = \frac{\lambda_{\text{em},1}(1+z)}{\lambda_{\text{em},2}(1+z)} = \frac{\lambda_{\text{em},1}}{\lambda_{\text{em},2}} \quad (24)$$

となり、実験室系での波長比と等しくなる。銀河で観測される輝線の中で天体物理学上実用的なもの種類は限られているので、観測波長の比からすぐにそれぞれの実験室系での波長を導出できる。銀河において輝線が見られない場合にも、吸収線を利用して赤方偏移を求めることもできる。有名な吸収線には 4000 Å break と呼ばれる、波長 400 nm における顕著な吸収があり、これは恒星大気における Balmer 連続吸収によって生じるものである。

広帯域イメージング⁵の場合と比べ、スペクトル⁶では良い S/N を得るのが困難であるため、分光観測は必ずしも可能なわけではない。いくら望遠鏡が大きくとも、スペクトルから銀河の赤方偏移を求めるには、光が弱すぎてしまうようなことはいつでも起こりうる。そこで用いられるのが、銀河の広帯域カラーである。多くのフィルターを用いて銀河の測光を行えば、これは実質的に低い波長分解能のスペクトルを得たのと同じことである。この方法では赤方偏移を見積もるために、スペクトルの広帯域での形状を利用する。十分な数のフィルターを用いた十分な精度の観測を行えば、ダストによる赤化と古い星の存在による赤方偏移なのかを識別することもできる。測光データとスペクトルのテンプレートを用いて、最小自乗法フィッティングを行うことで赤方偏移を導出できる。図1はこの結果を表しているが、”catastrophic failure” と呼ばれる外れ値はどうしても残ってしまい、測光による赤方偏移の導出においては、この外れ値を以下に減らすかということが大きな課題となっている。SDSS では u, g, r, i, z という、通常より境界がシャープになっている独自のフィルターが用いられており、これはより精度の良い赤方偏移の導出に役立っている。

高赤方偏移銀河は、中性ガス雲が Lyman 系列の吸収線を生じさせることから特定が可能である。これは、赤方偏移した Lyman α 線 (水素原子の $n=2 \rightarrow 1$ 遷移で、観測波長は $121.6(1+z)$ nm) よりも短い観測波長、特に Lyman limit (水素原子の $n=\infty \rightarrow 1$ 遷移、 $91.2(1+z)$ nm) よりも短い波長では、高赤方偏移銀河からの連続光は強く制限されるということである。

⁴高温で青色の O 型星、B 型星は寿命が短く、逆に低温の赤い星は年老いた星であることによる。

⁵フィルターを透過した全ての光子が、視野上の数個のピクセルの上に到達する。

⁶波長軸上の数百ものピクセルのそれぞれで十分な光子が受かる必要がある。

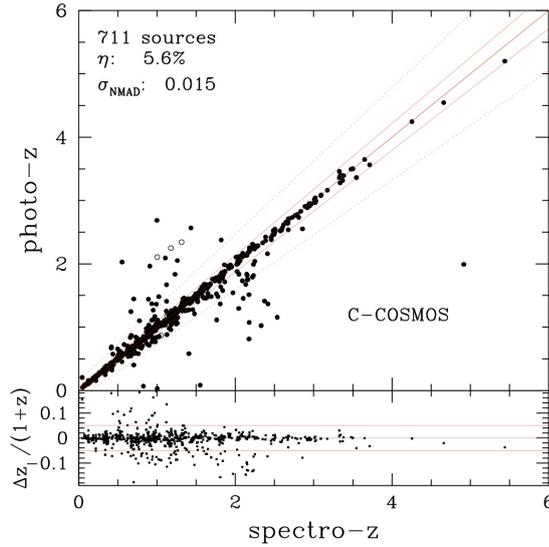


図 1: 測光による赤方偏移と分光観測による赤方偏移の比較 (Chandra-COSMOS)

このことから、 $z > 4$ の高赤方偏移銀河は、B バンドあるいは g バンドよりも長波長では検出できる一方、U バンドあるいは u バンドでは検出できないということになる。この測光による赤方偏移導出の手法は、U-band dropouts、または Lyman break galaxies と呼ばれている。このように、高赤方偏移銀河の探査は長波長側での検出限界に着目しているが、これは遠方に行くほど困難になっていく。というのも、 z の増加に伴い $\frac{dV}{dz}$ が 0 に近づき、十分な宇宙論的体積を利用できなくなるからである。追加の分光観測において、Lyman α 輝線 (静止波長 121.6 nm) を観測できることもある (図 2)。この場合、Lyman α 輝線より短波長では弱い連続光成分が見られるのに対し、長波長側では連続光が見られなくなることが分かる。しかしながら、近傍銀河に見られる 4000 Å break や [OII] 372.7 nm の放射を観測することはできないことから、高赤方偏移銀河のより詳細な調査は困難である。COMBO-17 survey では多数の中間帯域フィルターを利用し、測光による赤方偏移の精度を $\frac{\delta z}{1+z} \simeq 0.02$ まで上げることに成功している。

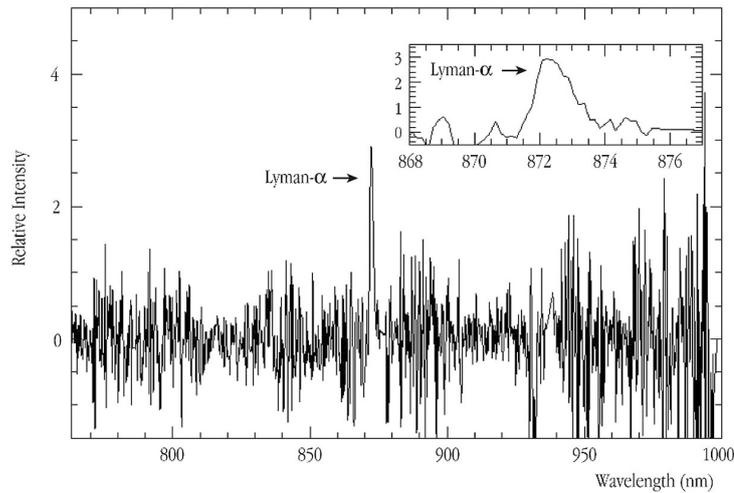


図 2: 高赤方偏移銀河 ($z \sim 6.2$) の Lyman α 輝線 (ESO)

4.5 Luminosity functions

今日の宇宙においてもっともありふれた銀河はどんなもので、銀河を無作為に選んだらどのような種類の銀河である確率が高いのであろうか。天の川銀河はしばしば典型的な渦巻銀河とも言われるが、実際には天の川銀河のような銀河よりも、ずっと多くの矮小銀河が存在している。

単位体積単位光度あたりの銀河の数は、光度関数 (luminosity function) と呼ばれ、しばしば $\phi(L)$ と表される。図 3 は早期型銀河と晩期型銀河それぞれについての光度関数のグラフである。高赤方偏移銀河の場合には、宇宙膨張の効果を考慮することが重要であり、光度関数の計算には共動体積を用いる。光度関数の形状は一般に単純で、光度の増加に伴いなだらかな傾斜での減少から、ある光度 L_* で急激な指数関数的減少に転じるというものである。このときの光度 L_* は break luminosity と呼ばれ、これに対応する質量は M_* と表される。多くの光度関数の形状は Schechter 関数

$$\phi(L) = \phi_* \left(\frac{L}{L_*} \right)^{-\alpha} \exp \left(\frac{-L}{L_*} \right) \quad (25)$$

でフィットすることができる。ここで ϕ_* は規格化定数であり、なだらかな傾斜の部分は指数 $-\alpha$ で、急激な減少は指数関数で表される。また break luminosity L_* は、フィッティングの際の自由パラメータである。式 (25) の関数形は Press-Schechter モデルと同様⁷であるが、Press-Schechter モデルでの過程は非常に単純化したものである。さらに、観測された銀河の光度関数の低光度側の傾斜は、予想されるダークマターハローの分布とは一致しない。このことから、銀河の分布とそのハローの質量との間には、単純な線形関係があるわけではないと考えられる。これも結局、ダークマターハローの物理は比較的単純であるが、バリオンの物理はそれよりずっと複雑であるということに帰着される。銀河の形成と進化を理解することも、現代宇宙論の主たる課題の一つである。

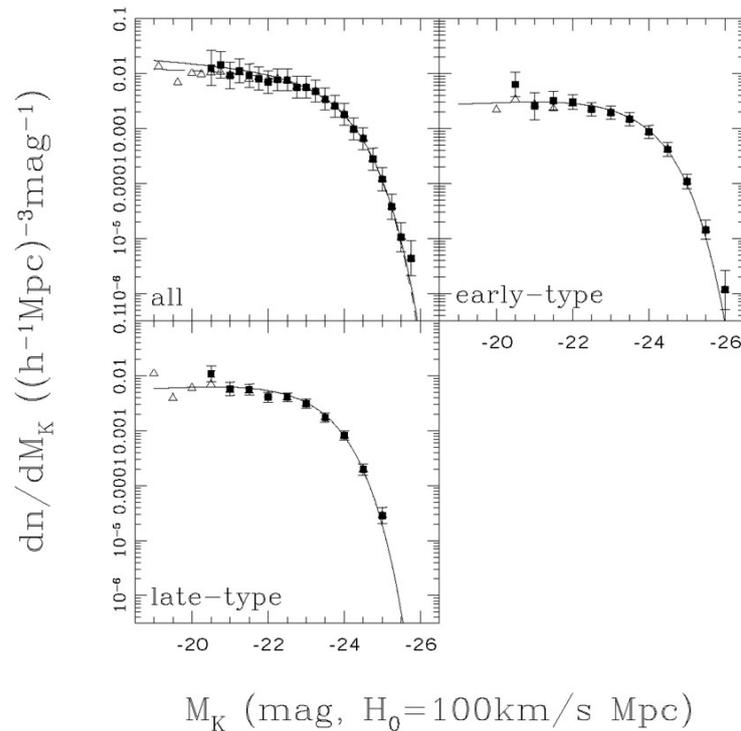


図 3: 早期型銀河・晩期型銀河の K バンドでの光度関数 (Kochanek et al. (2001))

⁷ $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合は Press-Schechter モデルと同一で、ホワイトノイズを表す。

Exercise 4.5

光度関数の縦軸は、単位絶対等級あたりの銀河数密度を表している。これと単位光度あたりの銀河数密度との関係を求める。まず、光度 L の天体の絶対等級は

$$m = -2.5 \log_{10} L + \text{const.} \quad (26)$$

と表される。この微小変化をとると

$$dm = -2.5 \frac{d(\ln L)}{\ln 10} = -\frac{2.5}{\ln 10} \frac{dL}{L} \quad (27)$$

となるので、単位絶対等級あたりの銀河数密度 $\frac{dN}{dm}$ は

$$\frac{dN}{dm} = \frac{dN}{-\frac{2.5}{\ln 10} \frac{dL}{L}} = -\frac{\ln 10}{2.5} L \frac{dN}{dL} \quad (28)$$

と表され、単位光度あたりの銀河数密度 $\frac{dN}{dL}$ との関係が導かれた。なおこの式の負号は、光度 L が大きくなるほど等級 m は小さくなることと対応している。

銀河の数密度を計算する方法は単純で、体積 V 中にある銀河の数 N を数えれば、数密度が $\rho = \frac{N}{V}$ と求められるというものである⁸。これが可能なのは、volume-limited sample、すなわち特定の体積 V_0 中の”全ての”銀河が分かっている場合のみである。これは

$$\rho = \frac{N}{V_0} = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^N 1 \quad (29)$$

と表現できる。しかし実際には、高輝度の銀河ほど遠方でも検出可能であることを考慮せねばならない。そこで、種類 i の銀河がこの体積中に確率 p_i で見つけられるとすると、銀河の数密度は

$$\rho = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \quad (30)$$

となる。例えば、この体積中にある特定の種類の銀河を見つける確率が $\frac{1}{10}$ ならば、1個見つけるごとに9個を見逃していることになり、見つけられた1個は実際には10個分の存在を表しているといえる。volume-limited sampleをとれば、すべての銀河に対して $p_i = 1$ となり、数密度の表式は式(29)に帰着される。数密度 ρ に関する二乗平均平方根 (root mean square, RMS) をとると、式(30)は

$$\sigma_\rho = \frac{1}{V_0} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i^2}} \quad (31)$$

となる。前述の確率は選択関数 (selection function)⁹ と呼ばれ、この確率が分かれば銀河の数密度及び光度関数を導出することができる。

⁸ここでは銀河の進化は考慮していない。

⁹これが”関数”と呼ばれるのは、一般にはこの確率が銀河の光度や赤方偏移といった性質に依存しているからである。

一般的なサーベイは、特定の波長においてあるフラックスより明るいすべての天体をリストアップする、flux-limited sample と呼ばれるサンプルを抽出するものである。volume-limited sample をとる場合と異なり、この場合には低輝度の銀河よりも遠方の高輝度銀河を検出することができる。選択関数 p_i を求めるには、種類 i の銀河を遠方へと動かすことを考え、そのフラックスがサーベイのフラックス限界と等しくなる距離 d_{\max} をとると、この距離はサーベイにおいてこの種類の銀河を検出できる限界の距離となる。半径 d_{\max} の球で囲まれる領域の体積 V_{\max} は、Euclid 空間では $\frac{4}{3}\pi d_{\max}^3$ に天球面上でのサーベイ範囲の面積を掛けた値となる。あらゆる銀河の中でも最大の V_{\max} よりも大きな体積 V_0 をとると、種類 i の銀河がフラックス限界を超えるフラックスを有する確率は

$$p_i = \frac{V_{\max,i}}{V_0} \quad (32)$$

と表される。このときの銀河数密度は

$$\rho = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^N \frac{V_0}{V_{\max,i}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{V_{\max,i}} \quad (33)$$

となり、またこのときの光度関数は、光度の間隔 ΔL の中に含まれる銀河数を計測することにより

$$\phi(L) = \frac{1}{\Delta L} \sum_{i \text{ in } L \rightarrow L+\Delta L} \frac{1}{V_{\max,i}} \quad (34)$$

と表される。この光度関数の計算法は $1/V_{\max}$ method と呼ばれている。また、サーベイの特徴に応じて検出確率 p_i を書き下すことにより、複雑な選択関数から光度関数を導くこともできる。

以上の議論では数多くの仮定をおいている。第一に、サーベイにおいて検出できないような種類の銀河はないものとしているということ、これはすなわち p_i が 0 にはならないことを意味する。第二に、検出確率 p_i の推定が十分な精度でなされているとも仮定していること、そして第三に、銀河の進化を考慮に入れていないことも挙げられる。第一の仮定については、選択関数に含まれないような天体を除外したようなサンプルを調べるのではない限り、扱いづらい問題である。例えば、g バンドで選んだ銀河の g バンドでの光度関数を考える場合には影響がないが、電波のフラックスで選んだ銀河の g バンドでの光度関数の場合には、この問題が生じうる。次に第二の仮定については、分光による赤方偏移の測定が困難な場合があることから、銀河のサンプルの一部が赤方偏移しているだけでもこの仮定が破れることがある。なお、このようなバイアスが掛かっていないサンプルは complete samples と呼ばれる。また、無作為に選んだ銀河のみについて赤方偏移しているか調べる手法は sparse sampling と呼ばれ、これによりサーベイのカバーする有効面積は狭くなり、その分は確率 p_i に織り込まれる。

選択関数の推定を誤ると、進化しないはずの銀河が進化しているように見えてしまうこともある。したがって近傍の銀河の集団においては、その集団が進化しているのか否かを知ることが重要になる。これには様々な手法があるが、他の仮定とは独立に行えるものとして $\langle V/V_{\max} \rangle$ test と呼ばれる方法がある。

ここで用いられるのが累積確率である。いかなる確率分布 $p(x)$ に対しても、 x が 10 個目の百分位¹⁰にある確率は 10%、50 個目の百分位にある確率は 50% である。この百分位は累積確率である。 x に対応する値のヒストグラムを描けば、これは確率分布 $p(x)$ の形状になるが、 x に対する百分位のヒストグラムを描いた場合には、平坦なグラフとなる。これは言い換えれば、累積確率

$$c(x) = \int_0^x p(x') dx' \quad (35)$$

が 0 から 1 の間で一定値をとるということである。

¹⁰percentile、百分位 (数)。連続変数を示す集合の内部での順位が、全体の何%以上に位置しているのかを表す。

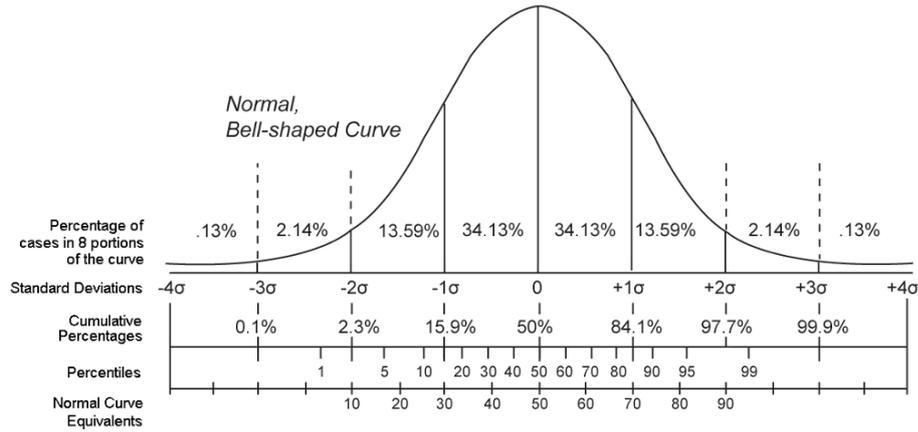


図 4: 百分位と累積確率 (http://psychology.wikia.com/wiki/Percentile_rank)

flux-limited sample の場合には、距離 d_i の位置にある銀河が、0 から d_i までの間の距離に見える累積確率は $V_i/V_{\max,i}$ で与えられる。ただし V_i は半径 d_i の球で囲まれる体積、 $V_{\max,i}$ は同様に半径 $d_{\max,i}$ の球で囲まれる体積である。銀河の進化がないか否かを知るには、 $V_i/V_{\max,i}$ が 0 から 1 の間に均等に分布しているかどうかを調べれば良い。このとき、この比の平均値 $\langle V/V_{\max} \rangle$ が $\frac{1}{2}$ になるはずである。銀河の進化がないという帰無仮説の真偽を調べるには、 $\langle V/V_{\max} \rangle$ の値とその不確かさを測定する必要がある。この不確かさの導出には、赤方偏移の不確かさを伝播させれば良いようにも思えるが、実際には赤方偏移の不確かさは無視できる量である。しかしながら、仮に帰無仮説が正しく銀河の進化がない場合でも、やはり $\langle V/V_{\max} \rangle$ の値には多少の差が出てくる。一般的な手法では、予想される差と不確かさを用い、サンプルのデータが帰無仮説と一致するかどうかを判断する。

Exercise 4.6

0 から 1 までの一様な分布の分散が $\frac{1}{12}$ であることを示し、中心極限定理を用いて N 個の銀河から得られる $\langle V/V_{\max} \rangle$ の標準偏差が $\frac{1}{\sqrt{12N}}$ であることを示す。

確率分布 $p(x)$ の分散 σ^2 は、2 乗の平均から平均の 2 乗を引いた値であるので

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 p(x) dx - \left(\int_0^1 x p(x) dx \right)^2 \quad (36)$$

で与えられる。確率分布が一様な場合には $p(x) = 1$ なので、このとき分散は

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 dx - \left(\int_0^1 x dx \right)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} \quad (37)$$

となる。また標準偏差 σ は分散の平方根なので、一様な確率分布の標準偏差は $\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}}$ である。ここで中心極限定理から、 N 個の測定値に不確かさ σ が存在しているときには、平均値の標準偏差が $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ になる。帰無仮説が成り立つ場合、 V/V_{\max} は一様な分布をなし、個々の V/V_{\max} の標準偏差は $\frac{1}{\sqrt{12}}$ であることから、 N 個の銀河の V/V_{\max} に対する標準偏差は

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} \times \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{12N}} \quad (38)$$

と求められる。

Exercise 4.7

銀河の進化がないことは、 $\langle V/V_{\max} \rangle = \frac{1}{2}$ を表しているのでしょうか。これは、選択関数が正しく与えられれば常に成り立つ。

Exercise 4.8

逆に $\langle V/V_{\max} \rangle = \frac{1}{2}$ であることは、銀河の進化がないことを表しているのでしょうか。これについては、必ずしも成り立つとはいえない。反例としては、ある赤方偏移 z_{\max} に対応する体積 V_{\max} に含まれる volume-limited sample をとった場合について、半分の銀河が $z = 0$ に、残り半分の銀河が $z = z_{\max}$ に存在していたとすれば、銀河の進化は明らかに実在しているのにも拘らず、 $\langle V/V_{\max} \rangle = \frac{1}{2}$ が成り立ってしまう。

高赤方偏移銀河やクエーサーのサーベイにおいては、銀河が相当に進化していることから、 $\langle V/V_{\max} \rangle$ は選択関数の検定には有効ではなく、代わりに進化が実際に起こっていることを実証するのに利用されることがある。

選択関数と関連した概念に、選択効果 (selection effects) というものがある。これは、ある効果が実際に存在するのか、あるいはサンプル天体の選び方によって生じたものに過ぎないのかについて議論がなされると、批判的なニュアンスを込めて呼ばれることもある。例えば、電波でのフラックス限界と可視光でのフラックス限界を有するサーベイにおいて、サンプルの銀河の電波での光度と可視光での光度を比較すれば、強い相関が得られる可能性が高い。しかしこれは、それぞれの光度が銀河までの距離に関係していることに起因しており、このような場合に相関が選択効果によるものであると結論づけられるのである。

こうなると、選択効果の影響を受けていない”偏りのない”サーベイなど、存在しないことになってしまう。あらゆる天文学サーベイは、何を含め何を除外するかによってその性質が決定される。仮に観測可能な宇宙の中に見られるすべての光源を観測したとしても、なお除外しているような天体 (惑星や銀河を伴わないダークマターハローなど) は存在する。理想的には、特定の問題に答えるのに合わせた選択関数を選べば、原理的に回避できない選択効果を、その問題の解決に利用することができる。

Exercise 4.9

銀河の光度関数が Schechter 関数であるとし、低輝度側の傾斜を $\alpha < 1$ とする。このとき、銀河の単位体積から発される光においては、break luminosity L_* 程度の光度を持つ銀河が支配的であることを示す。

まず、単位体積から発される光量は、銀河の数密度 (光度関数)

$$\phi(L) = \phi_* \left(\frac{L}{L_*} \right)^{-\alpha} \exp \left(\frac{-L}{L_*} \right) \quad (39)$$

とその光度 L の積

$$L\phi(L) = L_*\phi_* \left(\frac{L}{L_*} \right)^{1-\alpha} \exp \left(\frac{-L}{L_*} \right) \quad (40)$$

で与えられる。まず break よりも低輝度側では、 $\phi(L) \propto L^{-\alpha}$ であることから、 $L\phi(L)$ は

$$L\phi(L) \propto L^{1-\alpha} \quad (41)$$

という関数形で近似できる。 $\alpha < 1$ から、これは単調増加関数となる。一方 break よりも高輝度側では、 $\phi(L) \propto \exp\left(\frac{-L}{L_*}\right)$ から

$$L\phi(L) \propto L \exp\left(\frac{-L}{L_*}\right) \quad (42)$$

であり、これは L の増加に伴い 0 に近づく単調減少関数である。これら二つの関数形の境目に相当する位置では、 $L\phi(L)$ が最大値をとることから、このときの光度は $\frac{d(L\phi(L))}{dL}$ が 0 になる L として求められる。

$$\begin{aligned} \frac{d(L\phi(L))}{dL} &= L_*\phi_* \left[(1-\alpha) \frac{1}{L_*} \left(\frac{L}{L_*}\right)^{-\alpha} \exp\left(\frac{-L}{L_*}\right) - \frac{1}{L_*} \left(\frac{L}{L_*}\right)^{1-\alpha} \exp\left(\frac{-L}{L_*}\right) \right] \\ &= \phi_* \left[(1-\alpha) - \frac{L}{L_*} \right] \left(\frac{L}{L_*}\right)^{-\alpha} \exp\left(\frac{-L}{L_*}\right) \end{aligned} \quad (43)$$

であることから、

$$\frac{d(L\phi(L))}{dL} = 0 \quad (44)$$

のとき

$$\begin{aligned} (1-\alpha) - \frac{L}{L_*} &= 0 \\ L &= (1-\alpha)L_* \end{aligned} \quad (45)$$

となる。これより、銀河の単位体積から発される光量 $L\phi(L)$ を最大にする光度は $(1-\alpha)L_*$ であり、 L_* 程度の光度を有する銀河がこの光量に対して支配的であることが示された。