

Observational Cosmology

Stephen Serjeant

東京大学理学部天文学科 4 年

安藤 亮

平成 26 年 5 月 8 日

3 The local Universe

3.12 Baryon wiggles

宇宙再結合期の後も、物質のパワースペクトルにおける CMB の音響のピークは消滅してはいない。銀河のパワースペクトルにはこのピークに対応するバリオンのゆらぎが見られ、これは baryon wiggles あるいはバリオン音響振動 (baryonic acoustic oscillations, BAOs) ¹ と呼ばれる。この検出は困難であるものの、近年のサーベイ観測ではその兆候と思われる特徴が見つかっている。

目下 BAO についての研究は初期段階であるが、将来的に BAO が検出できれば、CMB の時代の標準物差しとして利用できると考えられている。これは宇宙の膨張率がどのように変化してきたかを測定し、宇宙論パラメータに制限を与えダークエネルギーの状態方程式を確立する上でも、理想的な標準物差しとなりうるものである。この目標のために現在、BAO やその他ダークエネルギーへの制限を与えるようなデータを得るためのサーベイが多数計画されている。

BAO は特定の赤方偏移における角度相関関数において検出可能なだけにとどまらず、赤方偏移軸上でも検出することができ、Hubble パラメータの決定を向上する上でも有効である。Hubble パラメータは状態方程式のパラメータ w ² を用いて

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+w)}} \quad (1)$$

と表されることから、逆に Hubble パラメータからダークエネルギーの状態方程式を決定することができるはずである。

¹再結合期より前の時代には、光子、電子、バリオンが強い相互作用により結合して混合気体を形成している。このときのバリオンの密度ゆらぎは光子とともに振動し、音波の形で伝播しているが、宇宙再結合によってバリオンと光子が分離すると、音波の振動パターンが凍結する。この後バリオンがダークマターと重力相互作用することにより、この振動パターンがダークマターに伝播し、天体の空間分布に影響を及ぼすと考えられている。

²気体の状態方程式は $p = w\rho c^2$ と表され、 w がこの状態方程式を決定するパラメータとなっている。例えば、圧力が 0 であるような物質の場合、 $w = 0$ となる。また、常に $\Lambda = 0$ が成り立つような場合には、 $w = -1$ となる。

Exercise 3.4

ある赤方偏移 z における BAO の共動座標での大きさが L_{BAO} であり、平坦な宇宙で現在観測される BAO の視直径が θ_{BAO} であるとする。このとき、赤方偏移 z の位置までの共動距離 d_{comving} を求める。

まず平坦な時空においては、共動距離は固有運動距離と等しくなる。このことと、赤方偏移 z の位置までの固有運動距離が角径距離 d_A の $(1+z)$ 倍となることから、

$$d_{\text{comving}} = (1+z)d_A \quad (2)$$

が成り立つ。一方、固有座標で測った BAO の大きさが $\frac{L_{\text{BAO}}}{1+z}$ であることから、赤方偏移 z の位置までの角径距離は

$$d_A = \frac{\frac{L_{\text{BAO}}}{1+z}}{\theta_{\text{BAO}}} = \frac{1}{1+z} \frac{L_{\text{BAO}}}{\theta_{\text{BAO}}} \quad (3)$$

で与えられる。これら 2 式から、赤方偏移 z の位置までの共動距離は

$$d_{\text{comving}} = \frac{L_{\text{BAO}}}{\theta_{\text{BAO}}} \quad (4)$$

と表されることが分かる。

Exercise 3.5

赤方偏移方向で測った BAO の大きさを δz 、共動座標で測った BAO の大きさを L_{BAO} とするとき、Hubble パラメータがどのように表されるかを考える。

赤方偏移 z の位置までの共動距離 d_{comving} は、Hubble パラメータを用いて

$$d_{\text{comving}} = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (5)$$

で与えられる。この両辺の微小量をとると、赤方偏移方向での共動距離の微小間隔が

$$\delta d_{\text{comving}} = \frac{c \delta z}{H(z)} \quad (6)$$

と表される。これが L_{BAO} に相当するので、

$$\begin{aligned} L_{\text{BAO}} &= \delta d_{\text{comving}} = \frac{c \delta z}{H(z)} \\ H(z) &= \frac{c \delta z}{L_{\text{BAO}}} \end{aligned} \quad (7)$$

という関係式が得られる。

Exercise 3.6

BAO のゆらぎの振幅は、観測対象の銀河によって異なるが、BAO のスケール長自体はこの銀河のバイアスには依存しない。

4 The distant optical Universe

4.1 Source counts

Euclid 空間における source count、すなわち天球面上における単位フラックスあたりの天体の数は、フラックス S に対して

$$\frac{dN}{dS} \propto S^{-\frac{5}{2}} \quad (8)$$

の依存性を有する。この関係を、integral source counts(integral number counts) N を用いて導出する。 $N(> S)$ はフラックスが S よりも明るいような天体の数として定義され、

$$N(> S) = \int_S^\infty \frac{dN}{dS} dS \quad (9)$$

と表される。このことから、 $\frac{dN}{dS}$ は differential source counts(differential number counts) と呼ばれる。

ここで、全ての銀河が同じ光度 L を有し、Euclid 空間において一定の密度 ρ で存在していると仮定する。フラックスが S より明るいような天体の数は、

$$S = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (10)$$

となるような半径 r の球の内側に存在する全天体数によって与えられることから、

$$N(> S) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \propto r^3 \quad (11)$$

が成り立つ。式 (10) から $S \propto r^{-2}$ であることを用いると、

$$N(> S) \propto (S^{-\frac{1}{2}})^3 \propto S^{-\frac{3}{2}} \quad (12)$$

となるので、これを微分すれば

$$\frac{dN}{dS} \propto S^{-\frac{5}{2}} \quad (13)$$

が得られる。この冪乗則は異なる光度を持つ銀河の集合の場合にも成り立つ。なおこの議論は、John Michell が 1767 年に提唱した非常に歴史の長いものである。

1970 年代初頭、B バンド (青色) における銀河計数 (number counts) が、 Ω_m の値に拘らず (このときは $\Lambda = 0$ が仮定されていた)、進化しないはずの銀河の分布に一致しないという問題が露呈した。光の弱い青い銀河があまりにも多く存在するというこの問題は、faint blue galaxies problem と呼ばれた。銀河は進化に伴って光度を変化させるものの、銀河進化のモデルだけではこの不一致を解決できない。唯一の解決策は近年形成された矮小銀河の存在を考えることであり、この存在を不自然でない形で説明する努力が進められた。

この状況が変わったのは、精密宇宙論³と調和宇宙論⁴の出現によって、宇宙論パラメータが高精度で決定されるようになった時であった。 $\Lambda = 0$ で平坦な宇宙と比較して、 Λ が定数で平坦な宇宙の場合には、高赤方偏移において時間と空間がより大きくなる。これにより、Bバンドの低輝度側における予想される銀河の数は増加することから、これは faint blue galaxy problem の大部分を解決するものである。一方可視光での銀河計数では、銀河の形成と進化の描像に対してこれほど強い制約を与えることはできない。なおサブミリ波での銀河計数は、宇宙論パラメータに非常に強力な制限を与えるものである。また、電波での source counts は $S^{-\frac{5}{2}}$ よりも急な冪乗則をもつことが知られており、このことは我々が住んでいるのは平坦でも定常でもない宇宙であることを示す最初の証拠を、CMB の発見に先んじて示すこととなった。

4.2 Cold dark matter and structure formation

なぜダークマターはしばしば、“冷たい”と表現されるのだろうか。これを考える鍵となるのは、ダークマターの粒子が脱結合 (decouple) する時間、すなわちダークマターと他の粒子との相互作用が減衰する時間である。ダークマターが相対論的粒子ならば、粒子の平均エネルギー $\langle E \rangle$ はボゾンなら $2.7kT$ 、フェルミオンなら $3.1kT$ であり、また平均運動量 $\langle |p| \rangle$ は

$$\langle E \rangle = \langle |p| \rangle c \quad (14)$$

と表される。粒子の運動量は、粒子が非相対論的 ($\langle |p| \rangle = m\langle |v| \rangle$) となるまでは赤方偏移とともに減少するが、運動量の分布は維持されて、非相対論的になった後も

$$\langle E \rangle = \langle |p| \rangle c = m\langle |v| \rangle c \quad (15)$$

が成り立つ。宇宙ニュートリノ背景の温度は現在 1.95 K ⁵ であり、この値から現在における仮想的な質量 m のニュートリノの速度を $|v| = 159(mc^2/\text{eV})^{-1} \text{ km s}^{-1}$ と見積もることができる。しかし、もしダークマター粒子が非相対論的になった時点で脱結合する場合、その速度は任意に遅くなりうる。この速度の違いから、“熱い”あるいは“冷たい”ダークマター⁶といった用語が生まれ、それらの中間物として“暖かい”ダークマターや“混合”ダークマターという概念も出てきている。

インフレーションの痕跡であるスケール不変のゆらぎから、いくつかの効果によって物質のパワースペクトルは曲げられる。例えば物質と輻射が同等となる時代より前に、物質密度のゆらぎの Fourier モードが地平線に到達したとすると、輻射のエネルギーによって宇宙が非常に速く膨張することから、物質が自己重力系を形成する時間がなく、Fourier モードは重力崩壊を超えて成長することができなくなる。これは Mészáros 効果と呼ばれる。また、仮にダークマター粒子が HDM 中でのように高速で運動するものとする、粒子が非相対論的になる前にその運動によって、宇宙初期における小さなスケールでの構造が消えてしまう。しかしながら、HDM のモデルでは観測されている大規模な銀河のパワースペクトルを再現できない。実際、宇宙論的ニュートリノ密度の上限

$$\Omega_\nu h^2 \simeq \frac{\sum m_i}{93.5 \text{ eV}} < 0.0076 \quad (16)$$

は、素粒子物理学ではなく宇宙の大規模構造の進化から得られた制限である。

³宇宙論の黎明期においては未知の領域が大きすぎたために、多数のモデルや仮説が乱立し、精密科学とは言えない状態になっていた。しかし、2000 年前後の観測技術の飛躍的向上 (Hubble 宇宙望遠鏡など) を経て、宇宙論パラメータを高精度で決定できるようになるなど、宇宙論が精密科学として認められるような段階に移行してきた、というもの。

⁴CMB から得られる宇宙論パラメータへの制限と、他の観測結果から得られる結果とがどれだけ一致するようになるかによって、結論づけられる宇宙論モデルが変わってくる、というもの。

⁵電子と陽電子が対消滅して光子を生じる反応の寄与から、CMB よりも低い温度となっている。

⁶それぞれ HDM、CDM と略される。

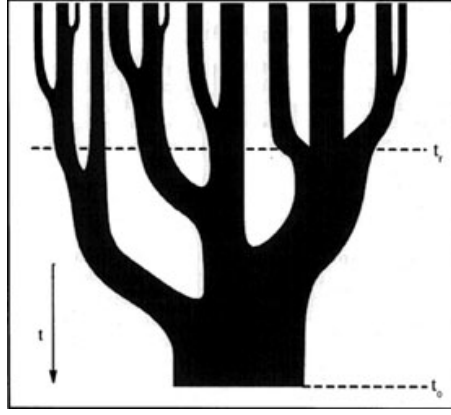


図 1: 宇宙の階層的形成 (Lacey & Cole 1993)

宇宙の大規模構造は、図 1 で上から下へと下るような階層的形成の過程によって生じたと考えられる。例えば、ビリアル化された小さなダークマターハローは、合体してより大きなダークマターハローを形成する。これは bottom-up 構造形成と呼ばれ、HDM のモデルで小さなスケールでの構造が消えてしまった結果起こる top-down 構造形成とは対照的な過程である。ただし、バリオンに関する構造形成はこれとは独立したものである。初期宇宙では物質密度のゆらぎはバリオンと光子との相互作用 (Thomson 散乱) の影響を受けており、その後の星や銀河の形成は非常に複雑な過程を経たものである。

時空の曲率による Robertson-Walker 計量への摂動の影響を考慮すると、密度ゆらぎの進化の計算は非常に複雑になる。平坦で $\Lambda = 0$ であるような宇宙において、球状の高密度領域が起こす崩壊を考えるのは比較的容易であるが、これは非相対論的な運動を前提としている。この場合、球対称の系では外側の物質を無視できるとする Birkhoff の定理から、一様で閉じた宇宙の同領域と同じようにゆらぎが振る舞うと仮定すればよい。

Exercise 4.1

Friedmann 方程式

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G(\rho_m + \rho_r)R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} \quad (17)$$

で $\Lambda = 0$ 、 $k = +1$ として、さらに密度 $\rho \equiv \rho_m + \rho_r$ が R に対して

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \quad (18)$$

(ただし添字 0 は現在の値を表す) の依存性を持っていることを用いると、式 (17) は

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 R^2 - c^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R} - c^2 \quad (19)$$

と変形できる。ここで、 $\frac{dR}{dt} = 0$ となるときの R を $R_{\max}$ とすると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R_{\max}} - c^2 \\ \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} &= \frac{R_{\max}}{R} c^2 \end{aligned} \quad (20)$$

が成り立つ。これと式 (19) から

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{R_{\max}}{R}c^2 - c^2 \quad (21)$$

が得られる。ここで、

$$\frac{dt}{d\theta} \equiv \frac{R}{c} \quad (22)$$

で定義される新たな変数 θ を導入すると、

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt} \frac{dR}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{c}{R} \frac{dR}{d\theta}\right)^2 \quad (23)$$

であることから、式 (21) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{R} \frac{dR}{d\theta}\right)^2 &= \frac{R_{\max}}{R}c^2 - c^2 \\ \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 &= R_{\max}R - R^2 \end{aligned} \quad (24)$$

という方程式に帰着される。この方程式について、

$$R(\theta) = \frac{R_{\max}}{2}(1 - \cos \theta) \quad (25)$$

$$t(\theta) = \frac{R_{\max}}{2c}(\theta - \sin \theta) \quad (26)$$

というサイクロイドを表す解を仮定すると、

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{R_{\max}}{2c}(1 - \cos \theta) = \frac{R}{c} \quad (27)$$

となり、 t の定義 (22) は満たされる。また

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{R_{\max}}{2} \sin \theta \quad (28)$$

であることから、

$$\begin{aligned} R_{\max}R - R^2 &= R_{\max} \frac{R_{\max}}{2}(1 - \cos \theta) - \left(\frac{R_{\max}}{2}(1 - \cos \theta)\right)^2 \\ &= \frac{R_{\max}^2}{4}[2(1 - \cos \theta) - (1 - 2\cos \theta - \cos^2 \theta)] \\ &= \left(\frac{R_{\max}}{2} \sin \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

となり、方程式 (24) も満たされる。以上より、サイクロイド解 (25)、(26) は $\Lambda = 0$ 、 $k = +1$ の場合の Friedmann 方程式の解となっていることが確かめられた。

平坦で $\Lambda = 0$ であるような宇宙での球状の高密度領域の場合にも同様の方程式が成り立つが、この場合には R は高密度領域の半径に相当し、その質量は

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (30)$$

と表される。この式の現在 ($t = t_0$) の値をとると

$$M_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0 \quad (31)$$

であることから、 $\frac{dR}{dt} = 0$ となるとき R の値 $R_{\max}$ は、式 (20) から

$$R_{\max} = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3c^2} = \frac{2GM}{c^2} \quad (32)$$

となることが分かる。この宇宙論モデルでは、宇宙は $\theta = 0$ において始まり、 $\theta = \pi$ で最大値に到達した後収縮に転じ、 $\theta = 2\pi$ で終焉を迎えることになる。高密度領域に関しては、大きさが最大となる $\theta = \pi$ は turn-around time と呼ばれ、 $\theta = 2\pi$ においては崩壊して一点に収斂する。

式 (25) と (26) から $R(t)$ を解析的に求めることはできないが、高密度の微小なゆらぎ δ の初期の振る舞いを、Taylor 展開を用いて表現することは可能である。式 (30) 及び (32) から、球状のクランプの密度は

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3R_{\max} c^2}{8\pi G R^3(\theta)} \quad (33)$$

と表される。一方周囲の空間の密度は、Einstein-de Sitter 宇宙の場合には

$$\rho_{\text{EdS}} = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (34)$$

で与えられる。この二つの密度の比は、

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} = \frac{3R_{\max} c^2}{8\pi G R^3(\theta)} 6\pi G t^2 = \frac{9}{4} R_{\max} c^2 \frac{t^2(\theta)}{R^3(\theta)} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \quad (35)$$

となり、これは $\theta = 0$ が特異点となってしまうが、 $\theta = 0$ の近傍で Taylor 展開することにより

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} \simeq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{30} \theta^2 + \dots \right) = 1 + \frac{3}{20} \theta^2 + \dots \quad (36)$$

を得る。一方、式 (26) を Taylor 展開すると

$$t(\theta) = \frac{R_{\max}}{2c} (\theta - \sin \theta) \simeq \frac{R_{\max}}{2c} \frac{\theta^3}{6} + \dots \quad (37)$$

となることから、これと式 (36) から

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} \simeq 1 + \frac{3}{20} \left(\frac{12ct}{R_{\max}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (38)$$

が成り立つ。以上より、高密度の微小なゆらぎは

$$\delta \simeq \frac{3}{20} \left(\frac{12ct}{R_{\max}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (39)$$

と表されることが分かる。

以上の議論では θ の高次の項を用いているが、これは線形理論近似と呼ばれる。この近似では、密度ゆらぎは $t^{\frac{2}{3}}$ に比例して成長するが、これは無次元スケール因子 a と同じ時間依存性である。しかしながら、高密度領域が収縮に転じる大きさ (turn-around radius) $R_{\max}$ に到達すると、線形理論は破れてしまう。これは $\theta = \pi, t = \frac{\pi R_{\max}}{2c}$ の時点に相当する。このときの密度 (turn-around density) は

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_{\max}^3} \quad (40)$$

と表されることから、周囲の密度との比は

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{EdS}}} = \frac{3M}{4\pi R_{\max}^3} 6\pi G t^2 = \frac{9}{2} \frac{GM}{R_{\max}^3} \left(\frac{\pi R_{\max}}{2c} \right)^2 = \frac{9\pi^2}{16 R_{\max}} \frac{2GM}{c^2} = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5.552 \quad (41)$$

となる。ただし式 (32) を用いた。したがって密度ゆらぎは $\delta \simeq 5.552 - 1 = 4.552$ となるが、これは線形理論で予測される値

$$\delta \simeq \frac{3}{20} \left(\frac{12ct}{R_{\max}} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq \frac{3}{20} (6\pi)^{\frac{2}{3}} \simeq 1.062 \quad (42)$$

と大きく異なる。

サイクロイド解で $\theta = 2\pi$ とすると、高密度領域は崩壊して密度が無限大になってしまう。線形理論の場合には、同じ点において $\delta \simeq 1.686$ となる。しかし実際には、高密度領域はビリアル平衡になって安定化する可能性が高い。このビリアル化は $\theta = 2\pi$ の時に起こると仮定されることが多く、この時の密度は以下のように求められる。まず、系が収縮に転じた時点 ($\theta = \pi$) では運動エネルギーが 0 であることから、エネルギー保存則より系の全エネルギーは、 $\theta = \pi$ の時点での束縛エネルギー $E(\propto \frac{1}{R_{\max}})$ に等しい。一方、ビリアル束縛エネルギー E_v とビリアル運動エネルギー $E_{K,v}$ との間には

$$E_v + 2E_{K,v} = 0 \quad (43)$$

が成り立ち、全エネルギーが

$$E = E_v + E_{K,v} \quad (44)$$

で与えられることから、

$$E = \frac{E_v}{2} \quad (45)$$

が得られる。この式から、ビリアル平衡下での半径は turn-around radius $R_{\max}$ の半分になるので、ビリアル平衡下での密度は turn-around density の 8 倍となる。重力崩壊が起こる時刻は $\theta = 2\pi$ に相当し、これは系が収縮に転じる turn-around time の 2 倍にあたる。式 (34) の表式から、 $\theta = 2\pi$ の時点における周囲の空間密度は、 $\theta = \pi$ のときの密度の $\frac{1}{4}$ であることから、周囲に対する高密度領域の密度の比率は $\theta = \pi$ の時点の 32 倍 (およそ 146) となる。なおこの崩壊によって放たれる光は、fingers of God 効果を受ける。球状の高密度領域の変化が赤方偏移空間でどのように見えるか⁷ は、図 2 に示される。

以上の議論は球状の高密度領域を仮定していたが、実際の高密度領域はほとんどが球状ではない。このようなより複雑な密度ゆらぎの成長は、数値的 N 体シミュレーションでモデル化することができる。しかし球状のモデルも、その根底にある物理のエッセンスを含むような意義深いものである。

⁷ 赤方偏移空間でのこのような歪みは、赤方偏移空間歪み (redshift distortions) と呼ばれる。

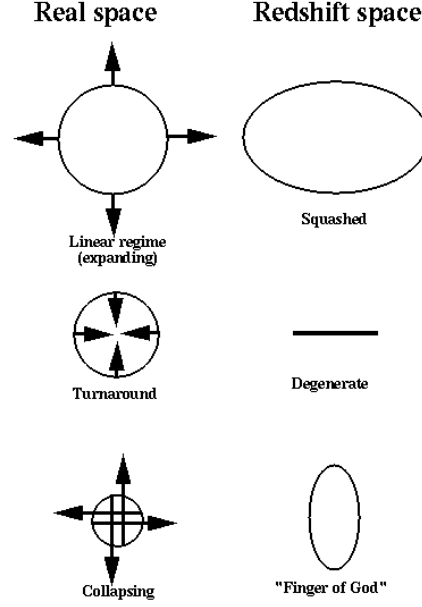


図 2: 赤方偏移空間歪み (University of Alabama, Department of Physics and Astronomy)

またこれまでは $\Omega = 1$ を仮定していたが、より一般には、ダークマターのゆらぎは流体力学の方程式によって記述される。ここでも線形近似を用いると、

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_m\delta \quad (46)$$

という関係式が成り立つ。ここで δ は物質の密度ゆらぎ $\frac{\delta\rho}{\rho_0}$ を表し、 $a = \frac{R}{R_0}$ は無次元スケール因子である。

Exercise 4.2

式 (46) を用いて、平坦で物質優勢の宇宙において物質の密度ゆらぎが $\delta(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ を満たすことを示す。

まず、平坦で物質優勢であるという仮定から、

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2} = 1 \\ 4\pi G\rho_m &= \frac{3}{2}H^2 \end{aligned} \quad (47)$$

が成り立つ。また、Hubble パラメータの定義から

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (48)$$

であるので、これらを式 (46) に代入すると

$$\ddot{\delta} + 2H(t)\dot{\delta} = \frac{3}{2}H^2\delta \quad (49)$$

を得る。ここで、この宇宙のモデルでは

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad (50)$$

が成り立つことを用いると、式 (49) は

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} = \frac{2}{3t^2}\delta \quad (51)$$

と変形できる。

次に密度ゆらぎの解を、定数 p と q を用いて

$$\delta = pt^q \quad (52)$$

と仮定すると、

$$\dot{\delta} = pqt^{q-1} \quad (53)$$

$$\ddot{\delta} = pq(q-1)t^{q-2} \quad (54)$$

であるので、それぞれ式 (51) に代入すると

$$\begin{aligned} pq(q-1)t^{q-2} + \frac{4}{3t}pqt^{q-1} &= \frac{2}{3t^2}pt^q \\ pt^{q-2} \left(q(q-1) + \frac{4}{3}q - \frac{2}{3} \right) &= 0 \\ \frac{1}{3}pt^{q-2}(3q-2)(q+1) &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

となり、この非自明な解は $q = \frac{2}{3}$ または $q = -1$ である。 $q = -1$ の場合、 $\delta = pt^{-1}$ は減衰を表す解であり、短時間で他方の解と比べて無視できる大きさにまで減衰してしまう。したがって、物理的に意味のある解は $q = \frac{2}{3}$ の場合、すなわち

$$\delta = pt^{\frac{2}{3}} \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (56)$$

である。この指数 $\frac{2}{3}$ の冪乗則は式 (42) の場合と同じであり、線形流体方程式から得られる帰結が、前述の線形理論近似から得られる結果と一致することが確かめられた。

一般化した宇宙論におけるゆらぎの解は、平坦な宇宙における近似では $\Omega_{m,0}^{0.65}$ に比例し、 $\Lambda = 0$ の宇宙では $\Omega_{m,0}^{0.23}$ に比例する。したがって初期条件が同じなら、開いた宇宙や $\Lambda > 0$ の宇宙の場合には、宇宙膨張率が増大することで大規模構造の形成が抑制され、平坦で $\Lambda = 0$ の場合よりも弱い大規模構造しかできないと考えられる。 Λ の影響が効くのはずっと後の時代になってからなので、この抑制は開いた宇宙の場合の方が強くなる。

線形理論から、平坦で物質優勢の $\Lambda = 0$ であるような宇宙では $\delta \propto t^{\frac{2}{3}}$ となるので、この場合パワースペクトルは $P(k) \propto t^{\frac{4}{3}}$ となる。線形理論の元では Fourier モードは独立に進化し、これは伝達関数 $T(k)$ を用いて以下のように表現される。

$$\Delta^2(k, z=0) = T^2(k)f^2(a)\Delta^2(k, z) \quad (57)$$

ここで $f(a)$ は線形成長因子で、この場合は $t^{\frac{2}{3}}$ である。

最終的に、物質のパワースペクトルは

$$\Delta^2(k) \propto k^{3+n_s} T^2(k) \quad (58)$$

と表される。これは以下のように導かれる。銀河の空間相関関数は、共動距離 $r = 8h^{-1}$ Mpc のスケールではおよそ $\xi(r) \simeq 1$ となる。しかしながら、これには銀河のクラスタリングの分のバイアスがかかっていると考えられるので、物質密度分布に $r = 8h^{-1}$ Mpc に相当するカーネルを畳み込み、得られた分布の標準偏差 σ_8 を銀河のパワースペクトルの比例係数を定義するのに用いる。観測された σ_8 の値から、銀河のバイアスパラメータ⁸

$$b = \frac{\sigma_8(\text{galaxies})}{\sigma_8(\text{mass})} \quad (59)$$

を決定できる。

ダークマターハローの単位質量あたりの数密度は質量関数 (mass function) と呼ばれ、密度ゆらぎを Gaussian と仮定することで予測できる。まず、密度場を半径 R でカーネルとの畳み込みを作る。これは質量スケール

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \quad (60)$$

と対応している。任意の点で密度ゆらぎ $\delta_{\text{convolved}}$ が生じる確率は、

$$\Pr(\delta_{\text{convolved}}) d\delta_{\text{convolved}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{convolved}}^2}} \exp\left(\frac{-\delta_{\text{convolved}}^2}{2\sigma_{\text{convolved}}^2}\right) d\delta_{\text{convolved}} \quad (61)$$

となり、これは単純な Gauss 分布である。分散 $\sigma_{\text{convolved}}^2$ は、パワースペクトルが $P(k) \propto k^{n_s}$ を満たすことから

$$\sigma_{\text{convolved}} \propto M^{-\frac{3+n_s}{6}} \quad (62)$$

と表される。特に、ある領域がビリアル化された崩壊を起こす $\delta_c = 1.686$ を超える密度ゆらぎを生じる確率は、

$$\Pr(> \delta_c, M) = \int_{\delta_c}^{\infty} \Pr(\delta_{\text{convolved}}) d\delta_{\text{convolved}} \quad (63)$$

で与えられる⁹。質量関数を計算するためには、クランプが孤立している、すなわち対象とする領域がより低密度の領域に囲まれていることを仮定しなければならないので、 $\Pr(> \delta_c, M + dM)$ という項を引く必要がある。また、cloud-in-cloud problem という問題も存在する。これは、質量スケール M のビリアル化されたクランプが、後で別の大きな質量スケールのクランプの中に含まれるようなことも起こりえるのではないか、という問題である。さらにこれまでの議論では、低密度領域の質量を数え落としていて、低密度領域の質量の半分を考慮していなかった分、結果の確率には2倍のファクターを掛けなければならないであろう。この2倍のファクターは実際に上述の2つの問題を解決するものであり、結局質量関数は

$$\begin{aligned} n(M) M dM &= 2\rho_0 [\Pr(> \delta_c, M) - \Pr(> \delta_c, M + dM)] \\ &= 2\rho_0 \left| \frac{d\Pr(\delta_c)}{d\sigma_{\text{convolved}}} \right| \left| \frac{d\sigma_{\text{convolved}}}{dM} \right| dM \end{aligned} \quad (64)$$

から、

⁸ バイアスパラメータがスケールに依存しないことを仮定している。

⁹ 式 (60) から M と R は一対一の対応関係にあるので、 R の関数である式 (63) は M の関数としても表現できる。

$$n(M) \propto \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-\alpha-2} \exp\left\{-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}\right\} \quad (65)$$

と表現できる。なおここでは、

$$\sigma_{\text{convolved}} \propto M^{-\alpha} \quad (66)$$

と定義しており、 M_* は δ_c と α から決まる定数であり、かつ $\sigma_{\text{convolved}} - M$ 関係の規格化定数である。以上の議論は Press-Schechter モデルと呼ばれ、N 体シミュレーションの結果とも非常によく一致する。

ダークマターの進化は、Press-Schechter モデルによって近似することができ、また N 体シミュレーションによる数値計算で追うことができるが、バリオンの進化については重力以外の様々な物理、例えば光子の冷却や加熱、衝撃波、恒星風からのエネルギー・運動量流入、星間物質の多段反応などが関わってくるため、極めて複雑になってしまう。これらを総合して銀河や星の形成を理解することは、観測的宇宙論の一つの目標である。近年の研究では、特定の銀河において化学組成やダスト、星の進化を追う単純化した数値モデルに、N 体シミュレーションを組み合わせた semi-analytic models と呼ばれる手法も用いられ、これらは多くの銀河の観測結果を説明することに成功しているが、未だ調整が必要なパラメータも多い。現状では、それぞれの semi-analytic mode で異なる仮定が用いられており、コンセンサスを確立する段階には至っていない。

ダークマターハローと銀河の間には一対一の対応関係があるとは限らず、ハローを有する銀河数の確率分布は halo occupation distribution によって記述される。この分布は銀河進化のモデルの鍵となる予測であり、小さなスケールでの空間相関関数や角度相関関数の形状と振幅から、制限を与えることができる。

バリオンはダークマターとは異なる振る舞いをするはずであり、そうでなければ銀河はもっと多くの伴銀河を有していなければならない。近年、銀河系に多数の伴銀河が存在していることが発見され、この問題は多少軽減されていはいるものの、質量の範囲によっては未だ 4 倍程度の不足がある。数値シミュレーションの結果から示されるように、最も低質量のハローにおける星形成が抑制されているとすると、この不足分を説明することができる。もしこれが事実なら、未だ最初の星形成を始めていない”隠れた矮小銀河”が多数存在し、銀河系の周りを取り囲んでいるということになる。

バリオンの物理によって解明されるかもしれないもう一つのダークマターに関する問題は、ダークマターハローの中心において密度の飛びが存在していない点である。N 体シミュレーションから、ダークマターハローは Navarro-Frenk-White profile という特性を有することが予想され、この場合中心部の密度は $\rho(r) \propto \frac{1}{r}$ の関数形に従うはずであるが、近傍銀河の観測から示唆される結果はこれと合致しない。この原因は、超新星からの恒星風やブラックホールへの質量降着によって、ハローから物質が取り除かれ密度分布も均されてしまっているからではないかと考えられる。