Observational Cosmology
Stephen Serjeant

東京大学理学部天文学科 4 年
安藤　亮

平成 26 年 4 月 14 日

1 Space and time

1.5 Cosmological parameters

宇宙はどのくらいの速さで膨張しているのだろうか。遠方の銀河までの距離 l をスケール因子 R と定数 D を用いて $l = DR$ と表すとするとこの式を微分して $D = \frac{l}{R}$ を代入すると

$$\frac{dl}{dt} = D\frac{dR}{dt} = \frac{l}{R}\frac{dR}{dt} = l\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right) = lH \tag{1}$$

を得る。ただし

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{2}$$

は Hubble パラメータであり、現在の値は $H_0 = 72 \pm 3$ km s^{-1} Mpc^{-1} とされている。$\frac{dl}{dt}$ を銀河の見かけの後退速度 v と見なせば、$v = lH$ から見かけの後退速度は距離 l に比例することが分かる。この見かけの運動は Hubble flow と呼ばれる。

H はしばしば Hubble 定数と呼ばれ、実際我々の生きている期間内では定数と見なせるが、長い宇宙の歴史の中では H は変化する値である。H_0 は現在の宇宙膨張率の測定値と見なすこともでき、$H_0 = 100h$ km s^{-1} Mpc^{-1} ($h = 0.72 \pm 0.03$) と表されることもある。この表現は観測的宇宙論でしばしば用いられる。

Friedmann 方程式から

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G(\rho_m + \rho_r)}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \tag{3}$$

が得られる。この式の右辺が宇宙を膨張させている。宇宙論では各項を無次元化した以下の密度パラメータがよく用いられる。

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2} \tag{4}$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi G\rho_r}{3H^2} \tag{5}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \tag{6}$$

$$\Omega_k = \frac{-kc^2}{R^2H^2} \tag{7}$$

これらを用いると式 (3) は

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \tag{8}$$

と表現できる。また

$$\Omega_{\rm total} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \tag{9}$$

という量も用いられる。図 1 はスケール因子に対する密度パラメータの変化を示している。なお Hubble パラメータと同様に、密度パラメータも現在の値を添字 0 で表すことが多い。

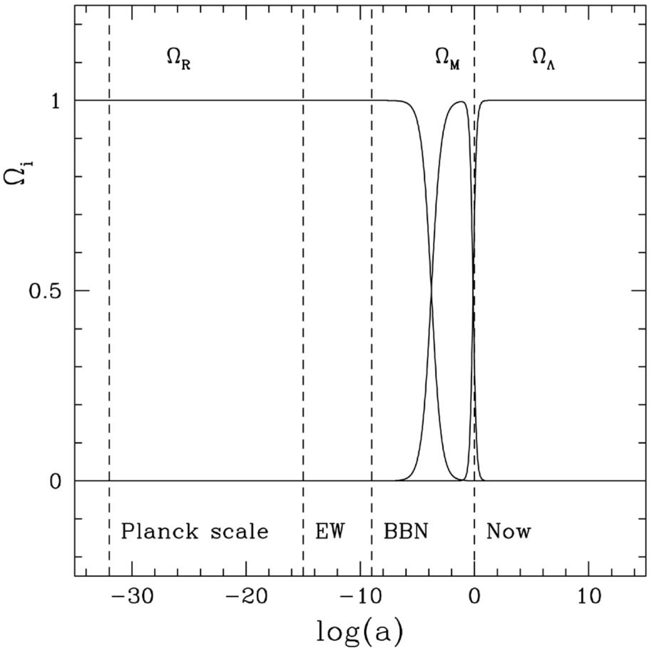

図 1: 密度パラメータの変化 (ned.ipac.caltech.edu/level5/March04/Carroll/Carroll_contents.html)

また、臨界密度 $\rho_{\rm crit}$ を

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{\rm crit}} \tag{10}$$

で定義すると、

$$\rho_{\rm crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{11}$$

となる。物質密度はしばしばこの臨界密度で規格化された値で表される。

宇宙の物質要素の大部分を占めるのは、光を発することも吸収することもしないダークマターと呼ばれる存在である。ダークマターは重力のみと相互作用し、これまでに見つかっている観測的証拠も重力効果によるもののみである。

WMAP 衛星による各密度パラメータの実測値は以下の通りである。これより、輻射の密度 $\Omega_{r,0}$ は十分小さく無視できることが分かる。

$$\Omega_{m,0}h^2 = 0.1326 \pm 0.0063 \tag{12}$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030 \tag{13}$$

$$\Omega_{b,0}h^2 = (2.273 \pm 0.062) \times 10^{-2} \tag{14}$$

$$\Omega_{r,0}h^2 \simeq 4.2 \times 10^{-5} \tag{15}$$

1.6 The age of the Universe

宇宙は一体何歳なのだろうか、そして遠方の銀河からの光が地球に届くまでにどれだけの時間がかかるのだろうか。

驚くべきことに、ビッグバンが起こってからの宇宙の年齢は、数%の誤差範囲内で求められている。この導出には、現在観測されている量から赤方偏移 z を対応する宇宙年齢と関連づける必要がある。Hubble 定数は

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{R_0}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{R_0}\right) = (1+z)\frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{-1}{1+z}\frac{dz}{dt} \tag{16}$$

と変形できる。また式 (3) を定数 $-kc^2$ についてまとめると、

$$-kc^2 = H^2R^2 - \frac{8\pi G\rho_m R^2}{3} - \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} \tag{17}$$

となり、この右辺は保存する。したがって、右辺の現在の値を考えると

$$H^2R^2 - \frac{8\pi G\rho_m R^2}{3} - \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} = H_0^2R_0^2 - \frac{8\pi G\rho_{m,0} R_0^2}{3} - \frac{\Lambda c^2 R_0^2}{3} \tag{18}$$

が成り立つ。この式を密度パラメータを用いて変形し、$1+z=\frac{R_0}{R}$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 &= \frac{R_0^2}{R^2} + \Omega_{m,0}\left(\frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^2}{R^2}\right) + \Omega_{\Lambda,0}\left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right) \\ &= (1+z)^2 + \Omega_{m,0}[(1+z)^3 - (1+z)^2] + \Omega_{\Lambda,0}[1-(1+z)^2] \\ &= (1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}\end{aligned} \tag{19}$$

を得る。最後に式 (16) を用いれば

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = H_0^2(1+z)^2[(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}] \tag{20}$$

という式が得られる。この式を用いれば、現在観測可能な物理量と赤方偏移 z のみを用いて、容易に $\frac{dt}{dz}$ を求めることができる。

一般的には $\frac{dt}{dz}$ は解析的に積分できないので、$z\to\infty$ まで数値的に積分することで宇宙年齢を求めることができる。同様に z まで積分すれば、赤方偏移 z の時代から光が到達するのに要する時間 (lookback time) が求められる。

宇宙で最も古い天体と比べると、宇宙年齢はどのくらいであろうか。これを考える上で特に有用なのは球状星団である。球状星団は宇宙の中でも最も古い自己重力系の一つで、その中の恒星はほぼ同時期に形成されたと考えられている。明るい恒星ほど主系列にとどまる期間が短いという関係性を用いれば、球状星団中の恒星の光度からその球状星団の年齢を推測できる。知られている中で最も古い球状星団の年齢は 127 ± 7 億歳であり、かつてはこの値が宇宙の年齢と形状 (とそれにより決まる運命) を強く制限していた。しかし、$\Omega_{m,0}=1$ かつ $\Lambda=0$ であると考えるべき事実の存在により、宇宙年齢が球状星団の年齢よりも若くなってしまうように思われる。

Exercise 1.4

式 (19) において、$\Omega_m = 1, \Lambda = 0$(物質優勢) の宇宙を仮定すると、

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = (1+z)^3 \tag{21}$$

が成り立つ。ここで $H = \frac{\dot{R}}{R}, 1+z = \frac{R_0}{R}$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_0^2}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \\ R^{\frac{1}{2}}\frac{dR}{dt} &= H_0 R_0^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{22}$$

が得られる。この式の両辺を t で積分して、$t = 0$ で $R = 0$ という初期条件を用いると、

$$\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}} = (H_0 R_0^{\frac{3}{2}})t \tag{23}$$

となる。現在では $t = t_0$ で $R = R_0$ なので、

$$\frac{2}{3}R_0^{\frac{3}{2}} = (H_0 R_0^{\frac{3}{2}})t_0 \tag{24}$$

であり、式 (23) を式 (24) で割ることにより

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{t}{t_0} \\ \frac{R}{R_0} &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる。

Exercise 1.5

式 (25) を微分すると、

$$\frac{\dot{R}}{R_0} = \frac{2}{3t_0^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}} \tag{26}$$

となる。この式の現在 ($t = t_0$) の値をとると、左辺は

$$\frac{1}{R_0}\frac{dR}{dt}\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{t=t_0} = H_0 \tag{27}$$

であることから、

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{2}{3t_0} \\ t_0 &= \frac{2}{3H_0} \end{aligned} \tag{28}$$

が得られる。$H_0 = 72 \pm 3$ km s^{-1} Mpc^{-1} $= (2.3 \pm 0.1) \times 10^{-18}$ s^{-1} を用いると、

$$t_0 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{(2.3 \pm 0.1) \times 10^{-18}\ [\mathrm{s}]} = (2.9 \pm 0.1) \times 10^{17}\ [\mathrm{s}] = 9.2 \pm 0.4\ [\mathrm{Gyr}] \tag{29}$$

となり、宇宙年齢を約 92 億年前後と見積もることができる。このような宇宙膨張のモデルは Einstein-de Sitter モデルと呼ばれる。

$$\tag{30}$$

1.7 The flatness problem

時間依存する密度パラメータの振る舞いについて考える。まず $\Lambda = 0$ を仮定すると、物質密度パラメータは $\Omega_m = 1 - \Omega_k$ と表される。Ω_k についての式 (7) を用いると、現在の値 $\Omega_{k,0}$ で規格化した Ω_k の値は

$$\frac{\Omega_k}{\Omega_{k,0}} = \frac{R_0^2 H_0^2}{R^2 H^2} = (1+z)^2 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = \frac{(1+z)^2}{(1+z)^2(1+z\Omega_{m,0}) - z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}} \tag{31}$$

と表されることから、Ω_k と Ω_m の z 依存性を調べることができる。

例えば $\Lambda = 0, \Omega_{m,0} = 1$ を仮定すれば $\Omega_{k,0} = 0$ となるが、これは常に $k = 0$ のときのみ成り立ち、この場合やはり常に $\Omega_m = 1$ である。この場合は非常に話が簡単になるが、実際にはこれを否定する観測的証拠が見つかっている。

もし $\Lambda = 0, \Omega_{m,0} = 0.7$ とすれば、z が大きくなるにつれて Ω_m は 1 に漸近していき、$z = 1000$(宇宙マイクロ波背景放射の赤方偏移) で $\Omega_m = 0.9996$、ビッグバンの 1 秒後では $\Omega_m = 1 - 10^{-15}$ となる。すなわち、現在の Ω_m の値が 1 ではない場合、初期宇宙での Ω_m の値は極めて 1 に近い、しかしごくわずかにずれた値であったことになる。

初期宇宙において Ω_m が非常に高い精度で 1 に近い値をとる必然性はないため、なぜこのように初期宇宙の密度パラメータがうまく”微調整”されていたのかという疑問 (fine-tuning problem) が生じる。Ω_k が小さな値をとる (宇宙の曲率が小さい) ことや、インフレーション理論によってこの問題の一部は説明できるが、Ω_Λ の fine-tuning については未だ満足のいく説明はなされていない。

1.8 Distance in a warped spacetime

1963 年に発見された電波源 3C273 は、$z = 0.158$ という遠方の天体であることが分かり、この距離は当時観測可能と考えられていた宇宙の範囲を超えるものであった。3C273 からの電波は地球に届くまでに 19 億年の時を経ていたが、これは電波源までの距離が 19 億光年であることを意味するのだろうか。

膨張宇宙の中での”距離”という概念は扱いづらいものであり、実際に光が旅してきた距離なのか、光が発せられた時点での 2 点の間隔なのか、あるいは現在における間隔なのか、という問題がある。宇宙論では、Robertson-Walker 計量の慣性系における、現在での 2 点の間隔を距離と考える。この距離は共動距離 (comoving distance) と呼ばれ、前述の 3C273 までの共動距離は 21 億光年である。これが光が旅した距離 19 億光年より長いのは、光が発されてから現在までの間に宇宙が膨張し、電波源がより遠ざかってしまったからである [1]。2 点間の現在の距離を表す共動距離に対して、宇宙慣性系に固定された時間で測られる距離は固有距離と呼ばれる [2]。

Robertson-Walker 計量の式

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{32}$$

を用いて、遠方の天体までの共動距離を求める。時刻 $t = t_0$(現在) の座標で天体までの視線距離を求めるので、$dt = 0, d\theta = d\phi = 0$ から

$$ds^2 = \frac{-R_0^2 dr^2}{1-kr^2} \tag{33}$$

[1] 現在観測可能な最も古い光は、宇宙誕生直後の 137 億年前の空間から発された光が現在地球に届いたものであるが、この空間は宇宙膨張により現在では共動距離 450 億光年の位置にあると考えられている。このように、共動距離は宇宙年齢に相当する 137 億光年を超えることもある。

[2] 固有距離は宇宙の大きさに比例する長さなので、3C273 までの固有距離もかつては 21 億光年より短かった。

である。この右辺は空間的隔たりの 2 乗に負号を掛けたものである。ここで共動距離 d_{comoving} を

$$\mathrm{d}d_{\mathrm{comoving}} = \frac{R_0 \mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{34}$$

で定義すると、

$$d_{\mathrm{comoving}} = R_0 \int_0^r \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{1-kr'^2}} = \begin{cases} R_0 \sin^{-1} r & \text{if } k=+1 \\ R_0 r & \text{if } k=0 \\ R_0 \sinh^{-1} r & \text{if } k=-1 \end{cases} \tag{35}$$

となる。これを実際の観測量と結びつけるために、地球へと届く光線について考える。光線の場合 $ds=0$ であり、またこの光線は視線方向なので $d\theta = d\phi = 0$ である。したがって光線の挙動は

$$\frac{R(t)\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = c\mathrm{d}t \tag{36}$$

と記述される。一般に左辺の $R(t)$ を解析的に表現することはできないが、右辺は $H = \frac{\dot{R}}{R}$ を用いて

$$cdt = \frac{cdR}{\frac{dR}{dt}} = \frac{cdR}{RH} \tag{37}$$

と変形できる。ここで

$$R = \frac{R_0}{1+z} \tag{38}$$

を微分して

$$dR = \frac{-R_0}{(1+z)^2} dz \tag{39}$$

となることを用いると、

$$cdt = \frac{c}{RH}\frac{-R_0}{(1+z)^2}dz = \frac{-c}{(1+z)H}dz \tag{40}$$

が得られるので、結局式 (36) は

$$\frac{R(t)\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{-c}{(1+z)H}dz \tag{41}$$

と変形できることが分かる。$R_0\mathrm{d}r = (1+z)R\mathrm{d}r$ を用いれば、

$$\mathrm{d}d_{\mathrm{comoving}} = \frac{R_0\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{(1+z)R\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{-c}{H}dz \tag{42}$$

となることから、共動距離は

$$d_{\mathrm{comoving}} = c\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{H(z')} \tag{43}$$

と表される。式 (19) を用いれば H を z の関数として表現できるので、

$$d_{\mathrm{comoving}} = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{(1+z')^2(1+z'\Omega_{m,0}) - z'(2+z')\Omega_{\Lambda,0}}} \tag{44}$$

と表すこともできる。

1.9 The edge of the observable Universe

観測可能な宇宙はどのくらいの大きさなのだろうか。もし宇宙が平坦で膨張していない空間ならば、観測可能な宇宙の半径は光速 c と宇宙年齢 t_0 の積となり光速で広がっていくが、膨張宇宙では話はこう単純ではない。

現在観測可能な宇宙の大きさは、現在 $(t = t_0)$ のスケール因子が R_0 ならば共動座標でも固有座標でも等しくなる。この大きさは、式 (44) で $z \to \infty$ として積分を実行すれば得られる。計算結果は $\frac{c}{H_0}$ の定数倍になり、たとえば $\Omega_m = 1, \Lambda = 0$ ならば $\frac{2c}{H_0}$ になる。現在受けられている密度パラメータの値を採用すると、観測可能な宇宙の半径は $\frac{3.53c}{H_0}$ となり[3]、この半径をもつ球の体積は Hubble 体積と呼ばれる。

この観測可能な宇宙がどのくらいの速さで広がっているのかを考える。赤方偏移 z の位置にある天体までの固有距離が $R_0 r$ であるとすると、現在 $(t = t_0, R = R_0)$ から δt だけ後 $(t = t_0 + \delta t, R = R_1)$ での新たな固有距離は

$$R_1 r = R_0 r + \left(\frac{dR}{dt}\delta t\right) r \simeq R_0 r + (R_0 H_0 \delta t) r \tag{45}$$

と表される。これより、固有距離の変化は

$$\frac{d(Rr)}{dt} \simeq \frac{R_1 r - R_0 r}{\delta t} = R_0 H_0 r \tag{46}$$

となり、現在の固有距離と Hubble 定数の積となる。これはすなわち、Hubble 定数が宇宙の膨張率を表していることを意味する。

以上から、観測可能な宇宙は $3.53c$ という驚くべき速さで膨張していることが分かる。膨張せず平坦な宇宙ならば天体の移動速度が光速を超えることはないが、膨張する時空においては状況は大きく異なり、天体の見かけ上の後退速度は光速を上回ることもあるということになる。

1.10 Measuring distances and volumes

赤方偏移 z を距離に変換するには、H_0 をはじめ宇宙論パラメータの値が必要になる。そこで、宇宙論パラメータとは独立に距離を測定する方法が要求される。例えば角径距離 (angular diameter distance)d_A は、天体の実際の大きさ D とその視直径 θ から

$$d_A = \frac{D}{\theta} \tag{47}$$

と表される。また固有運動距離 (proper motion distance)d_M は、既知の接線速度 u と角運動 $\frac{d\theta}{dt}$ から

$$d_M = \frac{u}{\frac{d\theta}{dt}} \tag{48}$$

と定義され、光度距離 (luminosity distance)d_L は既知の光度 L と観測されたフラックス S から

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

と表される。

[3] この距離は 14900 Mpc = 47 G ly に相当する。

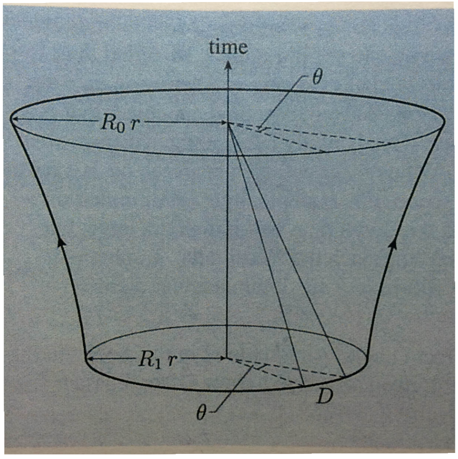

図 2: Robertson-Walker 計量における光線の軌道 (Observational Cosmology)

以上 3 つの距離は、平坦で膨張していない空間では等しくなるが、Robertson-Walker 計量では異なる値となる。まず角径距離は、大きさ D の遠方の天体からの光が時刻 $t=t_1(R=R_1)$ において発されたとすると、$D=R_1 r\theta$ から

$$d_A = \frac{R_1 r\theta}{\theta} = R_1 r \tag{50}$$

と表される。

次に固有運動距離の場合は、宇宙論的時間の遅れの影響を受ける。光子が発された時点での接線速度が

$$u = \frac{dD}{dt'} = \frac{dR_1 r\theta}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{d(R_1 r\theta)}{dt}\frac{R_0}{R_1} \tag{51}$$

と表されることから、

$$d_M = \frac{\dfrac{d(R_1 r\theta)}{dt}\dfrac{R_0}{R_1}}{\dfrac{d\theta}{dt}} = \frac{R_0}{R_1}\frac{d(R_1 r\theta)}{dt} = R_0 r \tag{52}$$

となる。これは $k=0$ の場合には共動距離 (35) に等しくなる。

最後に光度距離を考える。全光度 L の天体からの光子は、固有座標で表面積 $4\pi(R_0 r)^2$ の球面上に到達する。時間 dt' の間に星から放射されるエネルギーは Ldt' であるが、赤方偏移によってこれには $\frac{R_1}{R_0}$ のファクターがかかるので、最終的に地球に届くフラックスは

$$S = \frac{Ldt'\frac{R_1}{R_0}}{dt}\frac{1}{4\pi(R_0 r)^2} = L\frac{R_1}{R_0}\frac{R_1}{R_0}\frac{1}{4\pi R_0^2 r^2} = \frac{L}{4\pi\left(\frac{R_0^2 r}{R_1}\right)^2} \tag{53}$$

となる。これより光度距離は

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R_0^2 r}{R_1} \tag{54}$$

と表される。

このように、同じ天体までの 3 つの異なる距離から、宇宙論パラメータに制限を与えることができる。もっとも、これらの距離は $1+z=\frac{R_0}{R_1}$ の関係を用いれば

$$d_L = (1+z)d_M = (1+z)^2 d_A \tag{55}$$

という、宇宙論パラメータとは独立な関係式で結びつけることができる。したがって宇宙論パラメータへの制限は、各距離が赤方偏移によってどのように変換するかによって与えられる。

Robertson-Walker 計量では、角径距離は赤方偏移とともに単純に増加するのではなく、極大値をもっている。すなわち、遠方の天体のほうが大きく見えるケースがあるということになる。これは一つの側面として、かつてその天体が光を発した時点では現在よりも宇宙がずっと小さく、天体が地球に近い位置に存在していたことに起因する。また宇宙の形状による要素もあり、例えば球面上では南極から放射状に発された光が北極で再び一点に集まるように、膨張していない空間でも角径距離が極大値をもつことはあり得る。

Exercise 1.6

面輝度 (単位平方角あたりのフラックス) が赤方偏移によってどう変化するか考える。まず、式 (47) から天体の視直径は

$$\theta = \frac{D}{d_A} \tag{56}$$

であり、式 (49) からフラックスは

$$S = \frac{L}{4\pi d_L^2} \tag{57}$$

と表される。したがって面輝度は

$$\frac{S}{\theta^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}\left(\frac{d_A}{D}\right)^2 \propto \frac{d_A^2}{d_L^2} \tag{58}$$

という関係を満たす。ここで $d_L=(1+z)^2 d_A$ を用いると、

$$\frac{S}{\theta^2} \propto \frac{d_A^2}{(1+z)^2 d_A} \propto (1+z)^{-4} \tag{59}$$

となり、面輝度は $(1+z)$ の -4 乗に比例することが分かる。

観測的宇宙論においては、遠方の天体の全輝度を測定することはまずなく、代わりに天体の赤方偏移と波長幅 $\Delta\lambda_{\mathrm{obs}}$ におけるフラックスを測定する。これらの値は宇宙膨張による 2 つの補正を受けていて、1 つは観測される波長幅が光が発された当初より長くなっている ($\Delta\lambda_{\mathrm{obs}}=(1+z)\Delta\lambda_{\mathrm{em}}$) こと、もう 1 つは天体が $\Delta\lambda_{\mathrm{obs}}$ と $\Delta\lambda_{\mathrm{em}}$ とでは異なる強さの光を発しているということである。後者の補正は K 補正と呼ばれる。天体のスペクトルが冪乗則に従う ($S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$) とすると、光度 L_ν は

$$\frac{L_\nu}{10^{26}\ \mathrm{W\ Hz^{-1}sr^{-1}}} = \frac{S_\nu}{10^{-26}\ \mathrm{W\ Hz^{-1}sr^{-1}}}\left(\frac{d_M}{3241\ \mathrm{Mpc}}\right)^2 (1+z)^{1+\alpha} \tag{60}$$

という関係式を満たす。

また宇宙論においては、共動座標という物理量がよく用いられる。立体角 $\delta\Omega$ の空の領域は、固有座標での面積では

$$\delta A = d_A^2 \delta\Omega \tag{61}$$

と表される。また赤方偏移 z において、固有座標での面積が δA、厚さが $\frac{Rdr}{\sqrt{1-kr^2}}$ であるような平板の固有座標での体積は

$$dV_{\mathrm{proper}} = \delta A \frac{Rdr}{\sqrt{1-kr^2}} = d_A^2(z)\delta\Omega \frac{Rdr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{62}$$

となる。これより同じ平板の共動体積は

$$dV_{\mathrm{comoving}} = (1+z)^3 dV_{\mathrm{proper}} = (1+z)^3 d_A^2(z)\delta\Omega \frac{Rdr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{63}$$

ここで固有運動距離が $d_M = R_0 r$ と表されることを用いると、上式は

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{comoving}} = \frac{d_M(z)^2}{\sqrt{1+\frac{\Omega_{k,0}H_0^2 d_M^2}{c^2}}} \mathrm{d}(d_M)\delta\Omega \tag{64}$$

と積分できる。関数 $\frac{dV_{\mathrm{comoving}}}{dz}$ を積分することにより、半径 z の球で囲まれる空間の共動体積 V_{comoving} を k の値ごとに求めることができる。

1.11 The fate of the Universe

宇宙論パラメータから宇宙の終焉について知ることもできる。Robertson-Walker モデルから、我々の身体を形作る原子の究極的な終焉は、少なくとも西暦 10^{35} 年までにやってくることが分かるのである。

Friedmann 方程式 (3) を、$a = \frac{1}{1+z} = \frac{R}{R_0}$ 及び $\tau = H_0 t$ を用いて変数変換すると

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = 1 + \Omega_{m,0}\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \Omega_{\Lambda,0}(a^2 - 1) \tag{65}$$

となる。この微分方程式を数値的に解くことにより、密度パラメータ $\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}$ を変数として表される宇宙の運命の予測は、図 3 のように表される。現在一般的な密度パラメータの値を採用すれば、この宇宙は永遠に膨張し続けることになる。

宇宙が永遠に膨張していくとすると、宇宙における物質の存在は非常に疎になり、Ω_m は 0 に近づく。この場合宇宙論パラメータ Ω_Λ が支配的になり、宇宙は $\Omega_\Lambda = 1$ のモデルで表されるようになることから、Friedmann 方程式は

$$H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{66}$$

と表され、Hubble”定数”は本当に定数になる。$H = \frac{\dot{R}}{R}$ から、

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} \tag{67}$$

となるので、宇宙膨張は指数関数的であることが分かる。この式を解けば

$$R \propto \exp\left(ct\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right) \tag{68}$$

であり、これはしばしば de Sitter 時空と呼ばれる。

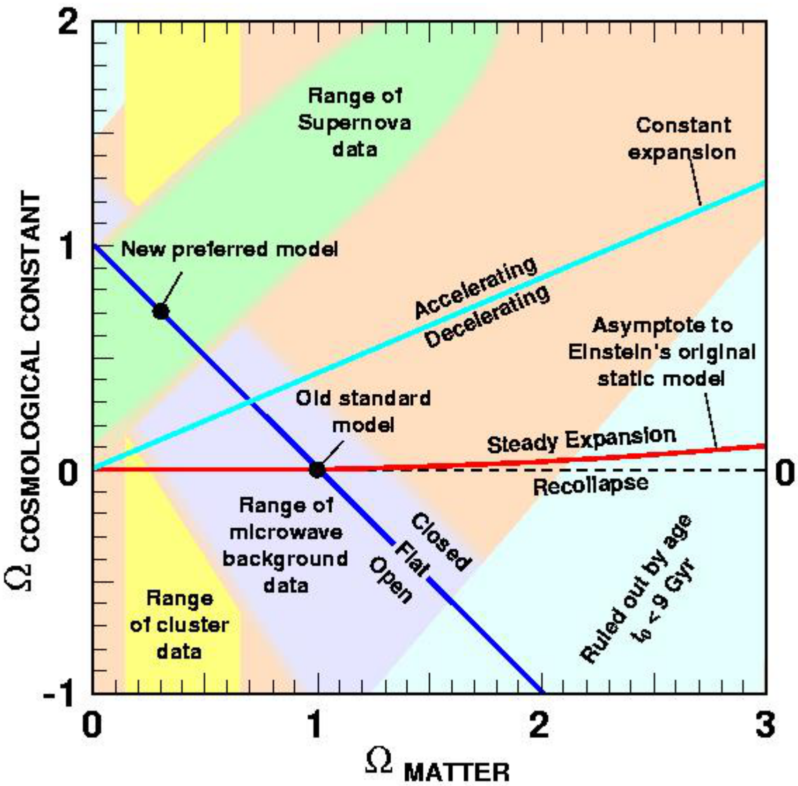

図 3: 宇宙論パラメータにより定まる宇宙の運命 (http://scipp.ucsc.edu/ haber/ph171/)

宇宙が指数関数的に膨張すると、一度他の領域と因果的なつながりをもっていた領域が、最終的には互いに因果的つながりを失う。これは二点間を光が伝わることができなくなるほどの早さで空間が膨張することに起因する。指数関数的に膨張する宇宙の中で発された光は、永遠に遠くまで進むとも言えるが、宇宙のスケール因子を考慮すれば、有限の共動体積の内部に届いている光の信号しか我々は知覚することができない。光の信号は

$$\frac{R(t)\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = c\mathrm{d}t \tag{69}$$

を満たし、Ω_Λ が支配的な宇宙では $k=0$ になることから、この場合 $R(t)dr = cdt$ である。ここで式 (68) を用いれば

$$\frac{R(t)}{R(t_1)} = \frac{R(t)}{R_1} = \frac{\exp\left(ct\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)}{\exp\left(ct_1\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)} = \exp\left(c(t-t_1)\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right) \tag{70}$$

であるので、$R_1 r$ を共動距離と考えれば

$$R_1 dr = R_1 \exp\left(-c(t-t_1)\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right) = c\exp\left(-c(t-t_1)\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)dt \tag{71}$$

となる。これを積分すれば

$$R_1 r = \int_{t_1}^{\infty} c\exp\left(-c(t-t_1)\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)dt = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H} \tag{72}$$

が得られる。したがって時間が無限大になっても、光の信号は共動距離 $R_1 r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ までしか到達せず、これより遠方の地点については、光線よりも宇宙の膨張の方が速くなるために見ることができない。しかし H が定数 (膨張率が一定) であることから、このことはどの時刻においても成り立つ。これはすなわち、半径 $\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ の固定された地平線が周囲に広がっているということであり、隣り合う銀河でさえいつかはどんどん遠ざかって、観測可能な宇宙の外側へ出て行ってしまう。

しかし、銀河が地平線を超えるところを見ることは決してできない。地平線に近づく銀河の赤方偏移はどんどん大きくなり、その銀河の中での時計を仮に見られたとすると、その時計の遅れも大きくなっていく。時刻 t_2 に銀河が地平線に到達するとすると、銀河内の時計は t_2 に近づくにつれ進みがどんどん遅くなり、地球の視点からは時計が決して t_2 まで到達することはない。しかし銀河内の立場ではその中の時計は全く影響を受けず、逆に地球にある時計がどんどん遅くなっていくように見えるはずである。

この赤方偏移と時間の遅れは、ブラックホールの事象の地平面に落ち込む物体の記述と同様に捉えられる。実際に、半径 $\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ の地平面は宇宙論的事象の地平面と呼ばれ、ずっと未来の宇宙はブラックホールを逆転させたもののように見えるということである。

Exercise 1.7

宇宙論パラメータの値 $H_0 = 72 \pm 3$ km s^{-1} Mpc^{-1} $= (2.3 \pm 0.1) \times 10^{-18}$ s^{-1} 及び $\Omega_{\Lambda,0} = 0.742 \pm 0.030$ から、宇宙論的事象の地平面の大きさを見積もる。式 (6) から、

$$\Lambda = \frac{3\Omega_{\Lambda,0} H_0}{c^2} = \frac{3 \times (0.742 \pm 0.030) \times ((2.3 \pm 0.1) \times 10^{-18})}{(3.0 \times 10^8)^2} = (1.3 \pm 0.2) \times 10^{-52}\ [\mathrm{m}^{-2}] \tag{73}$$

となる。これより事象の地平面の大きさは

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \sqrt{\frac{(1.3 \pm 0.2) \times 10^{-52}}{3}} = (1.5 \pm 0.1) \times 10^{26}\ [\mathrm{m}] = (4.9 \pm 0.3) \times 10^{3}\ [\mathrm{Mpc}] \tag{74}$$

と表される。これは、現在の観測可能な宇宙の半径 15000 Mpc の $\frac{1}{3}$ 程度という、非常に大きな値であることが分かる。

Ralph Alpher と George Gamow は、初期宇宙は核融合が起こるほどに高温かつ高密度であると考え、合成される重元素の量も計算したが、ビッグバンの 3 秒後でも現在と同様の物理法則が成り立つのか疑問を呈していた他の科学者たちからは非難された。しかし、宇宙初期の元素合成は観測から確認され、後者の批判は退けられることとなった。現在の物理法則を将来の宇宙にも適用しようとする場合に、やはり現在の物理法則を適用して良いのかを考える上では、前述の批判を心に留めておかねばならない。

現在の宇宙では、存在する全てのバリオンは星の誕生と死のサイクルに少なくとも潜在的には関わっている。しかし 10^{12} 年頃には、宇宙は新たな星形成を起こせないほど希薄になってしまう。したがってバリオンは、白色矮星や中性子性などの縮退物質になるか、褐色矮星に固定されるか、ブラックホールに落ち込むか、あるいは星形成を起こせないほど希薄に宇宙に分配された原子や分子として存在することになる。さらに未来になれば、陽子が崩壊してしまうような時代さえ考えられる。素粒子物理学の標準模型では陽子は安定で崩壊しないとされているが、いくつかの大統一理論では最終的に陽子が崩壊することが予測されている。カミオカンデの実験から、陽子の半減期は最低でも 10^{35} 年と分かったが、これは宇宙の様相について予測し得るもっとも先の時代である。そしてそんな未来の予測は、間違っていたとしても誰も反論することはできないであろう。