

Observational Cosmology

Stephen Serjeant

東京大学理学部天文学科 4 年

安藤 亮

平成 26 年 4 月 7 日

1 Space and time

1.1 Olbers' paradox

オランダの天文学者 Olbers は、もし宇宙が無限に広がっていて、あらゆる方向への視線が恒星に続いているのなら、なぜ夜空は太陽のように明るくならないのだろうかという深遠な問いを投げかけた。これは以下のように説明される。

太陽の光度を L 、距離を r とすると、太陽からのエネルギーフラックスは

$$S = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (1)$$

で与えられる。一方太陽の半径を D とすれば、恒星の視半径は $\frac{D}{r}$ となり、結果的に面輝度は

$$\frac{\frac{L}{4\pi r^2}}{\left(\frac{D}{r}\right)^2} = \frac{L}{4\pi D^2} \propto \frac{L}{D^2} \quad (2)$$

と表され、太陽までの距離 r に依存しない定数となる。従って、あらゆる恒星が太陽と同じ光度と半径を有していると仮定すれば、これらすべての恒星は太陽と同等の面輝度をもつことになり、これよりあらゆる方向への視線が恒星へと続いているならば、全天が太陽と同じくらい明るくなってしまうことになる。

1.2 Olbers' paradox in a different way

同じ問題についての別の見方もある。宇宙は均一かつ等方的であるとし、単位体積当たり ρ の恒星が存在すると仮定する。フラックスが S から $S + dS$ の範囲にあるような恒星の数を見積もるために、まず全ての恒星の光度を L と仮定し、地球から半径 r の位置にある厚さ dr の球殻を考える。この球殻の体積は $4\pi r^2 dr$ であることから、球殻中に含まれる恒星の数は

$$dN = \rho \times 4\pi r^2 dr \propto r^2 dr \quad (3)$$

となる (ただし平坦な Euclid 空間を仮定している)。恒星のフラックス S は距離 r の -2 乗で変化するので、

$$\frac{dS}{dr} \propto \frac{L}{r^3} \quad (4)$$

であり、フラックスが S から $S + dS$ の範囲にあるような恒星の数は

$$dN = \frac{dN}{dr} \frac{dr}{dS} dS \propto \rho r^2 \frac{r^3}{L} dS \propto r^5 dS \quad (5)$$

と表される。式 (3) と (5) の dN は同一であることから、式 (1) の関係式は S と r の間の一对一の対応関係を与え、 r と $r + dr$ の間隔は S と $S + dS$ の間隔にちょうど対応していることが分かる。

ここで式 (1) より

$$r \propto S^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

であることから、

$$\frac{dN}{dS} \propto r^5 \propto S^{-\frac{5}{2}} \quad (7)$$

という、number counts あるいは source counts と呼ばれる関係式が得られる。 $\frac{dN}{dS}$ はフラックスの間隔 dS の間に存在する恒星の数 dN を表しており、冪指数が $-\frac{5}{2}$ であるような S についての冪乗則 ($y \propto x^a$ の形の関係式) が成り立っている。

恒星の明るさを全て等しいとはせず、異なる光度 L_i をもつ恒星が数密度 ρ_i で存在しているとする、各タイプの恒星の number counts は、タイプごとに異なる定数 k_i を用いて

$$\frac{dN_i}{dS} = k_i S^{-\frac{5}{2}} \quad (8)$$

で与えられるので、全体での number counts はやはり

$$\frac{dN}{dS} = \sum \frac{dN_i}{dS} = S^{-\frac{5}{2}} \sum k_i \propto S^{-\frac{5}{2}} \quad (9)$$

という冪指数 $-\frac{5}{2}$ の冪乗則に従うことが分かる。しかしこの冪乗則から、光度 S_0 より明るい恒星の全フラックスは

$$S_{\text{total}} = \int_{S_0}^{\infty} S \frac{dN}{dS} dS \propto \int_{S_0}^{\infty} S^{-\frac{3}{2}} \propto S_0^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

となり、 S_0 が 0 に近づくとこの値は発散してしまい、夜空は無限に明るいことになってしまう。

Exercise 1.1

1.1 では均質で等方的な宇宙の場合に、全天が太陽と同じくらい明るくなってしまうという帰結であったのに対して、1.2 では同様の宇宙が無限に明るくなってしまうという結論を得た。これらはいずれも事実に反するが、二つの場合で異なる結果となったのはなぜであろうか。

両者の主たる違いは、恒星の不透明性を考慮しているか否かであると考えられる。1.1 ではあらゆる方向への視線が、太陽と同じ面輝度をもつ恒星に到達していると仮定していることから、いわば全天が太陽と同じ明るさに見える天体で埋め尽くされた状態にあたるが、太陽の向こう側にあって直接見えない恒星については、計算に含まれていない (この点は事実と適合している)。一方 1.2 では、恒星の不透明性が考慮されず、直接見える恒星に隠されて観測できないはずの恒星の光まで見えることになっている。すなわち、各視線方向に無限個の恒星が見えることになってしまっており、あらゆる視線方向の面輝度が無限大に発散してしまっていると考えられる。

当然ながら夜空は太陽のようにも無限にも明るくないが、それでは Olbers の問いへの答えは何なのであろうか。宇宙が不透明ではなく、可視光の波長では宇宙は極めて透明であるという事実は答えではない。また恒星の寿命が有限であるということも、あらゆる方向への視線が必ず恒星へと続いているということを否定するわけではないため、答えたりえない。

このパラドックスへの答えの一つの側面は、この宇宙が有限の年齢であるということである。そしてもう一つの側面は、我々が住む世界は静的で平坦な宇宙ではなく、実際には我々は曲がった膨張する時空の中に住んでいるということである。

1.3 Metrics: the Universe in a nutshell

宇宙空間の幾何学を考える準備として、まず 3 次元の場合の Pythagoras の定理は

$$H^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (11)$$

と表される。これより、空間中の 2 点間の座標が $(\delta x, \delta y, \delta z)$ で与えられるとき、2 点間の距離 δL は

$$(\delta L)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 \quad (12)$$

を満たす。非相対論的な物理では、距離 δL はどのように運動している観測者が測定しても同じ長さとなる。これは時間についても同様で、2 つの事象間の時間間隔 δt はいかなる観測者に対しても同じである。基礎物理においては、宇宙の運動を観測者に依存しない方法で記述することが重要な目的であり、このような観測者によらない量 (不変量) は中心的な役割を果たすことも多い。それゆえ、物理法則は宇宙のあらゆる場所で成り立たなければ意味がない。また、多くの物理量はそれが保存するような状況が興味の対象となる。

とはいえ、現状では万物を統一的に記述できる理論は存在せず、ミクロの世界を記述する量子力学と、マクロの世界を記述する一般相対論があるのみである。目下発見されている不変量が、宇宙の根底に存在する法則へと我々を導いてくれることを期待したい。

Einstein の特殊相対論では、空間も時間も不変量ではなく、両者を組み合わせた以下の時空が保存する。

$$(\delta s)^2 = (c\delta t)^2 - (\delta x)^2 - (\delta y)^2 - (\delta z)^2 \quad (13)$$

右辺の係数 $(+1, -1, -1, -1)$ (本によっては $(-1, +1, +1, +1)$) は計量係数と呼ばれ、計量テンソルの成分となっている。

特殊相対論の計量 (メトリック) から、時間の遅れや Lorentz 短縮などの有名な結果が導ける。自由落下する粒子は、光学での Fermat の原理と同様に、時空間隔 s の合計が最大になるような経路を運動する。この最適な経路は測地線と呼ばれる。

Worked Example 1.1

時計の秒針が 1 秒を刻む間隔は、時計の慣性系では時空間隔 $(\delta t, 0, 0, 0)$ である (ただし $\delta t = 1$ s)。観測者に対して時計が一定速度 v で運動しているとき、観測者には同じ間隔が $(\delta t', \delta x', \delta y', \delta z')$ と観測されるとする。

ここで、観測者が x 軸に沿って運動しているとしても一般性を失わない。このとき $\delta y' = \delta z' = 0$ であり、運動速度は $v = \frac{dx'}{dt'}$ と表される。 $\delta s' = \delta s$ から

$$\begin{aligned} (c\delta t)^2 &= (c\delta t')^2 - (\delta x')^2 \\ \frac{c^2(\delta t)^2}{c^2(\delta t')^2} &= 1 - \frac{(\delta x')^2}{c^2(\delta t')^2} = 1 - \frac{(dx')^2}{c^2(dt')^2} \\ \left(\frac{\delta t}{\delta t'}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{dx'}{cdt'}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15)$$

とすれば、観測者から見た秒針が刻む間隔が

$$\delta t' = \gamma(v)\delta t \quad (16)$$

と表されることが分かる。

また、時計にひもをつけて振り回し、1 周 0.5 秒の周期で回転させたとき、時計の世界線における時空間隔の合計はいくらになるであろうか。なお世界線とは、時空における物体の経路をたどる一連の事象である。

固有時間、この場合は時計によって測られる時間を τ とすれば、 $\delta s = c\delta\tau$ となる。このとき、 $\delta\tau = \delta t$ から全時空間隔は $0.5c$ m、あるいは 0.5 光秒である。時計がひもで振り回されている場合には、固有時間 τ は非慣性系の中での時間であるが、常に $\delta s = c\delta\tau$ が成り立つことから、やはり全時空間隔は 0.5 光秒となる。

Worked Example 1.2

2 点間を結ぶ光線上の時空間隔はいくらであり、またこの時空間隔はどのように宇宙の因果律と結びついているであろうか。

任意の 2 点間を結ぶ光線上の時空間隔は 0 である。この因果律との関係性は、図 1 の光円錐に示される。原点における事象の情報は、光速かそれより遅い速度で未来の光円錐内の任意の事象へと伝えられる。同様に、過去の光円錐内の任意の事象は現在へと影響を与えることができる。このように、原点と光円錐内の事象との時空間隔は time-like であると呼ばれ、 $(\delta s)^2 > 0$ である。一方、光円錐の外側の事象は現在との間で影響を与え合うことはできない。また原点と光円錐外の事象との時空間隔は space-like であると呼ばれ、このとき $(\delta s)^2 < 0$ である。光円錐上の事象では時空間隔は $\delta s = 0$ となり、これは null と呼ばれることもある。

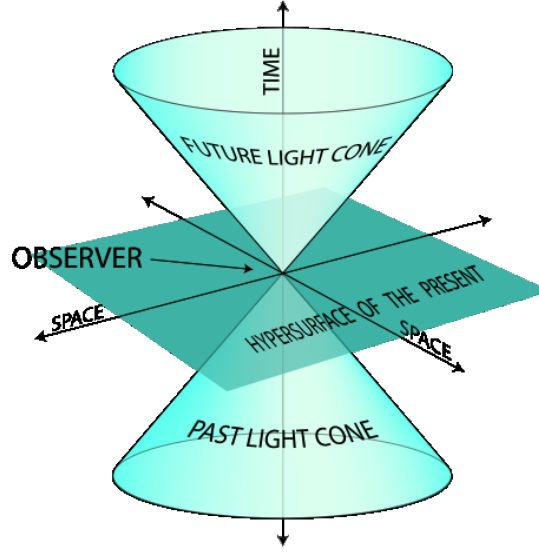


図 1: 光円錐 (Wikipedia)

Exercise 1.2

最も高エネルギーの宇宙線は 10^{20} eV 以上のエネルギーを有しており、また多くの宇宙線は静止質量 $938.28 \text{ MeV}/c^2$ の陽子からなる。ここで、銀河系の直径を約 100000 光年とすると、前述の高エネルギー宇宙線が銀河系を横切るのにかかる時間はどのくらいであろうか。

特殊相対論においては、粒子のエネルギー E と速度 v との関係式は以下ようになる。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

ただし m は静止質量である。この式から、粒子の速度 v は

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \frac{mc^2}{E} \\ v &= \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} c \end{aligned} \quad (18)$$

と表される。高エネルギー宇宙線の場合は $E = 10^{20}$ eV、 $mc^2 = 938.28 \times 10^6$ eV であるので、各値を代入すると

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{938.28 \times 10^6}{10^{20}}\right)^2} c \simeq c \quad (19)$$

となり、宇宙線はほぼ光速で進むことが分かる。従って、この宇宙線が直径 10^5 光年の銀河系を横切るのに要する時間は、静止した観測者から見れば当然 10^5 年である。しかしながら宇宙線の慣性系では、この時間は γ のファクターがかかってくる。この場合

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{mc^2} = \frac{10^{20}}{938.28 \times 10^6} \simeq 10^{11} \quad (20)$$

から、宇宙線が銀河系を横切る間に宇宙線 (の慣性系にある観測者) が感じる時間は、

$$\frac{10^5 \text{ [yr]}}{10^{11}} = \frac{3 \times 10^7 \times 10^5 \text{ [s]}}{10^{11}} = 30 \text{ [s]} \quad (21)$$

となり、極めて短い時間であることが分かる。

不変量である時空間隔を球座標系で記述すると、以下のようになる。

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - (rd\theta)^2 - (r \sin \theta d\phi)^2 \quad (22)$$

膨張宇宙を記述するために、空間を表す項に時間依存のファクターを掛けると

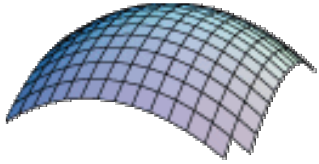
$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (23)$$

となる。ここで $R(t)$ はスケール因子と呼ばれる。

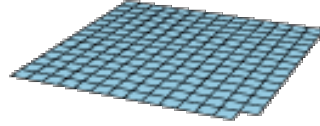
空間的に一様で、等方的なメトリックは

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (24)$$

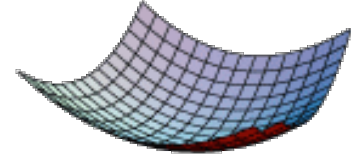
となる。ここで k は宇宙の曲率を表す定数であり、 $k = 0$ なら平坦、 $k = +1$ なら球面的 (閉じた宇宙)、 $k = -1$ なら双曲面的 (開いた宇宙) となる。 k の値はこの3つのみを考えればよく、それ以外の値の場合は r 及び R を定義し直せば同じ結果が得られる。図2は $k = +1, 0, -1$ のそれぞれの場合について、2次元的に表現したものである。これは過度な単純化にも思えるが、平坦ではなく膨張もしている時空を理解するには、状況を数学的に表現するよりも可視化の方が簡単なのである。



閉じた宇宙



平坦な宇宙



開いた宇宙

図 2: 曲率の異なる宇宙 (<http://astr.phys.saga-u.ac.jp/funakubo/BAU/BAU.html>)

式 (22) は (Friedmann-)Robertson-Walker 計量と呼ばれ、このときの t は座標時間あるいは宇宙時間と呼ばれることもある。この計量は空間的に一様かつ等方的なので、任意の点を原点に選ぶことができるが、宇宙を直線的に記述しようとするやや強引な側面もある。またこの計量は、宇宙膨張が等方的になるような慣性系として好んで用いられ、 t, r, θ, ϕ の座標系はこの慣性系で測られる。この慣性系は宇宙慣性系と呼ばれ、宇宙背景放射の慣性系と等価であるが、この慣性系内で移動している観測者から膨張する宇宙を見ると、その膨張は等方的には見えなくなってしまう。

Robertson-Walker 計量に関するよくある間違いには以下のようなものがある。

- 宇宙が膨張しているなら、なぜ自分の身長は伸びないのか？
 - 身体は化学結合によって結びついており、頭は足に対して自由に移動できるわけではないから。
- 宇宙の膨張に従って、なぜ地球は太陽から離れて行ってしまわないのか？
 - Robertson-Walker 計量は一様で等方的な宇宙について記述するが、太陽の重力場が支配的な太陽系のような局所的な空間では、一様・等方的の仮定は全く成り立たないから。
- 宇宙はどこへ向かって膨張しているのか？
 - 宇宙は何かに向かって膨張しているわけではなく、ただ単に膨張しているだけである。一般相対論では時空の曲率は時空内部での観測によって決定されるので、時空の曲率を記述する際には時空をより高次元の時空に埋め込んで考える必要はない。したがって高次元空間の事象は我々が観測できる事象には何ら影響を及ぼさず、よって高次元空間の存在を仮定する必要すらない。
- 宇宙の中心はどこなのか？
 - 宇宙膨張はよく風船のアナロジーで例えられるが、この風船の中心は space-like ではなく time-like である。宇宙は確かに中心から膨張し始めたが、この中心は Robertson-Walker 宇宙における時間の始まりであって、特定の場所を示しているわけではない。従って、宇宙膨張は宇宙のあらゆる場所で始まったといえる。
- ビッグバンから何が宇宙を膨張させているのか？
 - 古典的には Einstein の場の方程式の初期条件によるということになるが、このようにして始まった、という答えは不十分であるし、問題を避けているということになってしまう。インフレーション理論はこの膨張のメカニズムを説明するものである。

式 (22) は等方的な宇宙膨張の慣性系を定義するものであり、この等方性は宇宙の大規模構造や宇宙背景放射についての観測によって裏打ちされている。にも拘らず、宇宙には特定の慣性系が存在しないとする場の方程式と、齟齬をきたさないものとして宇宙を捉えることは可能なのかという問いに対しては、フラクタル構造という可能性が挙げられる。

一般相対論の場の方程式は、曲率 k とスケール因子 $R(t)$ の両方を決定する。これらの方程式から以下の関係式が得られる。

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G(\rho_m + \rho_r)R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} \quad (25)$$

$$\ddot{R} = -4\pi G \left(\rho_m + \rho_r + \frac{3p}{c^2} \right) \frac{R}{3} + \frac{\Lambda c^2 R}{3} \quad (26)$$

ここで ρ_m は宇宙の平均物質密度、 ρ_r は輻射の密度である。これらの方程式は Friedmann 方程式と呼ばれ、密度 ρ と物質と輻射の圧力 p はともに時間変化する。 Λ は宇宙項と呼ばれており、物理的には宇宙空間の膨張 (負の場合には収縮) の傾向を表している。最も簡単なケース ($k = \Lambda = 0$) では、物質が支配的な宇宙なら $R(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ 、輻射が支配的な宇宙なら $R(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$ となる。

Exercise 1.3

式 (23) から式 (24) を導出する。式 (23) を変形すると

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{1}{R} (\rho_m + \rho_r) c^2 R^3 - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} \quad (27)$$

となり、この式を微分すると

$$2\ddot{R}\dot{R} = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(-\frac{\dot{R}}{R^2} (\rho_m + \rho_r) c^2 R^3 + \frac{1}{R} \frac{d((\rho_m + \rho_r) c^2 R^3)}{dt} \right) + \frac{2\Lambda c^2 R \dot{R}}{3} \quad (28)$$

を得る。ここで宇宙をガスで満たされた箱とみなし、エネルギー保存則を用いることにより、エネルギー密度の変化がガスがなされる仕事 $p dV$ に等しいことが示せる。すなわち

$$d((\rho_m + \rho_r) c^2 R^3) = -p d(R^3) \quad (29)$$

となることから、

$$\frac{d((\rho_m + \rho_r) c^2 R^3)}{dt} = -p \frac{d(R^3)}{dt} = -3p R^2 \dot{R} \quad (30)$$

が得られる。この結果を式 (26) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \ddot{R}\dot{R} &= -4\pi G \left((\rho_m + \rho_r) \frac{R}{3} - \frac{1}{3R} (-3p R^2 \dot{R}) \right) + \frac{\Lambda c^2 R \dot{R}}{3} \\ \ddot{R} &= -4\pi G \left(\rho_m + \rho_r + \frac{3p}{c^2} \right) \frac{R}{3} + \frac{\Lambda c^2 R}{3} \end{aligned} \quad (31)$$

となり、求める式が得られる。

1.4 Redshift and time dilation

2 個の光子が、スケール因子が R_1 であるような時刻 t_1 において、時間間隔 δt をおいて放出される状況を考える。このときの光子の間隔は $c\delta t$ である。これらの光子が、スケール因子が R_0 である現在の時刻 t_0 において地球に到達したとすると、現在での光子の間隔は宇宙膨張によって $\frac{R_0}{R_1} c\delta t$ に伸びている。すなわち、2 個目の光子は 1 個目の光子の到達から $\frac{R_0}{R_1} \delta t$ だけ後に届くので、Robertson-Walker 宇宙における 2 点の時計は、 $\frac{R_0}{R_1}$ のファクターだけずれることになる。これは宇宙論的時間の遅れと呼ばれ、

$$a = \frac{R_1}{R_0} \quad (32)$$

という無次元スケール因子を導入するのが便利である。この a が 1 となるのが現在であり、 $a < 1$ は過去を表す。

光子自身を波動として扱くと、光波の 2 つのピークの間隔が同じファクター $\frac{R_0}{R_1}$ で伸びることから、光波の波長が伸び、その色は赤い方へとずれる。これを赤方偏移と呼び、赤方偏移を表す値 z は

$$1 + z = \frac{R_0}{R_1} = \frac{1}{a} = \frac{\lambda_{\text{observed}}}{\lambda_{\text{emitted}}} \quad (33)$$

と定義される。 z はしばしば

$$z = \frac{\lambda_{\text{observed}} - \lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{emitted}}} \quad (34)$$

とも表され、この値が大きいことは、光が発されてから膨張を表す項に大きな変化があったことを意味している。赤方偏移はしばしば天体の後退だと誤解される。というのも、後退する物体は Doppler 効果によってその波長が赤い方へとずれるからである。実際銀河は互いに静止しているわけではないが、その特異速度は高々 1000 km/s 程度であり、またこれによる Doppler 効果は銀河を赤化することと青化することもある。しかし距離が 100 Mpc を超えると、特異運動よりも宇宙膨張による赤方偏移が支配的になる。銀河同士の間隔は宇宙膨張によりどんどん広がっているが、これは銀河が平坦で膨張していない時空の中で運動しているのとは物理的に異なる性質のものであり、Doppler シフトと宇宙膨張による赤方偏移は混同されるべきではない。

Robertson-Walker モデルに代わるものとして、Zwicky により”tired light”宇宙というモデルが提案されたことがある。このモデルでは、光子が長い距離を運動する間に、何らかの相互作用によって次第にエネルギーを失うことによって赤方偏移が起こるとされた。そもそもこのモデルを再現できないような観測結果は多かったが、とりわけ時間の遅れが検出されたことで”tired light”モデルは支持されなくなった。

赤方偏移を測定するには、光が発されたときの波長 λ_{emitted} が必要であるが、これは原子や分子が量子化されたエネルギー準位間を遷移する際に、やはり量子化された波長の光子が放出あるいは吸収されることを用いて測定できる。初期宇宙でも原子の振る舞いが現在と同様であると仮定すれば、遠方の物質で生じた遷移を検出することで λ_{emitted} を求めることができるが、果たしてこの仮定は正しいのだろうか。

高赤方偏移における特徴的な原子や分子の遷移は多数検出できることが分かっており、時代の違いによるあらゆる差異は微小であるとみなせる。たとえば、電磁相互作用の大きさが初期宇宙で異なっていたとすると、これにより微細構造定数 α の値が変化し、 α^2 に比例する波長の差は影響を受けることになる。現状では初期宇宙における原子や分子の遷移を実験室で再現することはできていないため、 α の値がどのようであったかを知ることは困難である。地上の実験室では α の値は一定と見なせるが、宇宙での実験では従来知られていなかった α の変化が検出される可能性もある。ただし、 α の値が変化する可能性を示唆する理論は存在するものの、これらの理論では赤方偏移に特異な変化を生じることは予測されていない。