電波干渉計の基礎

142001 理学部天文学科 4 年 石田 剛

2015 年 12 月 3 日

1 干渉計の数学

1.1 Fourier 変換

天体から受信した信号は電圧の時間変化 $V(t)$ として得られる。これを Fourier 変換することでどんな周波数成分が含まれているかを知ることが出来る。一般的な Fourier 変換の式は以下で与えられる。

$$\hat{V}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \exp(-2\pi i\nu t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

また、逆変換は以下。

$$V(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\nu) \exp(2\pi i\nu t)\,\mathrm{d}\nu \tag{2}$$

Fourier 変換したものを逆変換すると元に戻ることは容易に確認できる。

1.2 自己相関関数

ある信号 $V(t)$ が時刻 τ だけ離れた $V(t+\tau)$ とどれだけ相関を持つかを表すものとして、自己相関関数がある。自己相関関数 $C(\tau)$ は以下のように定義される。

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} V(t)V(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

1.3 Wiener-Khintchine の公式

自己相互関数の表式の $V(t)$ を Fourier 逆変換の形で表せば

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} V(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\nu)\exp(2\pi i\nu(t+\tau))\,\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\nu)\exp(2\pi i\nu\tau)\underbrace{\left[\int_{-T/2}^{T/2} V(t)\exp(2\pi i\nu t)\,\mathrm{d}t\right]}_{T\to\infty\ \text{で}\ \hat{V}^*(\nu)}\mathrm{d}\nu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{\hat{V}^*(\nu)\hat{V}(\nu)}{T}\right]\exp(2\pi i\nu\tau)\,\mathrm{d}\nu \\
&= \mathrm{FT}^{-1}[S(\nu)]
\end{aligned} \tag{4}$$

と書ける。ここで $S(\nu) := \lim_{T\to\infty}\hat{V}^*(\nu)\hat{V}(\nu)/T$ はパワースペクトルと呼ばれる。つまり、自己相互関数とパワースペクトルは互いに Fourier 変換対である。これを Wiener-Khintchine の公式と呼ぶ。

1.4 相互相関関数とクロスパワースペクトル

自己相互関数は自分自身の相関をとっていたが、同様にして異なる関数 $V_1(t)$ と $V_2(t)$ の相関を考えることもできる。これを相互相関関数と呼び、以下で定義される。

$$C_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_1(t) V_2(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

また、クロスパワースペクトルは以下のように定義される。

$$\begin{aligned} S_{12}(\nu) &= \mathrm{FT}[C_{12}(\tau)] \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{\hat{V}_1^*(\nu)\hat{V}_2(\nu)}{T} \end{aligned} \tag{6}$$

1.5 convolution

ある確率変数 X_1, X_2 がそれぞれ独立な確率分布に従うとする。すなわち

$$\mathrm{Prob}(x \le X_1 < x + \mathrm{d}x) = P_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Prob}(x \le X_2 < x + \mathrm{d}x) = P_2(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

が成り立つとき、これらの和の確率変数 $X_3 = X_1 + X_2$ が従う確率分布 $P_3(x)$ は

$$P_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(x') P_2(x - x')\,\mathrm{d}x' =: P_1(x) * P_2(x) \tag{8}$$

と表される。これをたたみ込み (convolution) と呼ぶ。たたみ込みの重要な性質としてたたみ込み定理がある。$f * g$ を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \mathrm{FT}[f(t) * g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') \exp(-2\pi i \nu t)\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-2\pi i \nu t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-t') \exp(-2\pi i \nu (t-t'))\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}t' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-2\pi i \nu t')\,\mathrm{d}t' \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-2\pi i \nu \tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{FT}[f(t)]\,\mathrm{FT}[g(t)] \end{aligned} \tag{9}$$

とそれぞれの関数を Fourier 変換した積に等しくなる。また、fg を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \mathrm{FT}[f(t)g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \exp(-2\pi i \nu t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2\pi i \nu t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu') \exp(2\pi i \nu' t)\,\mathrm{d}\nu'\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu') \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2\pi i (\nu - \nu') t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu') F(\nu - \nu')\,\mathrm{d}\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{FT}[g(t)] * \mathrm{FT}[f(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{FT}[f(t)] * \mathrm{FT}[g(t)] \end{aligned} \tag{10}$$

とそれぞれの関数を Fourier 変換したもののたたみ込みに等しくなる。天文学においては、有限な分解能で観測を行ったときの観測結果は真の値と応答関数 (Poins Spread Fuction: PSF) をたたみ込んだもので与えられる。電波天文学では PSF のことをビームとも呼ぶ。

2　干渉計の原理

2.1　座標系

電波源の中心方向に原点を持ち、天球面上に張り付いた座標系を考える。東西方向と南北方向を l, m 軸とし、それらに垂直な軸を n 軸とする。電波源の位置を表すためにはこのような座標系が便利である。一方、地上に設置されたアンテナの位置を示すには、地球に固定された座標系が便利である。X 軸を経度 $\lambda_l = 0$, 緯度 $\phi_l = 0$ の方向、Y 軸を $\lambda_l = \pi/2$, $\phi_l = 0$ の方向、それらに垂直な軸として Z 軸をとる。これらの座標系の関係を考えるために、(l, m, n) に平行な地球中心を原点とする座標系を (x, y, z) とし、(x, y, z) と (X, Y, Z) の対応を考える。電波源の赤経、赤緯をそれぞれ α, δ とすれば、アンテナの位置ベクトル $\boldsymbol{P}$ を (x, y, z) 座標系で表現した (P_x, P_y, P_z) は、(X, Y, Z) 座標系で表現した (P_X, P_Y, P_Z) と

$$\begin{pmatrix} P_z \\ P_x \\ P_y \end{pmatrix} = R_Y(-\delta) R_Z(\theta) \begin{pmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{pmatrix} \tag{11}$$

のように結ばれる。ここで R_* は $*$ 軸周りの回転行列を表す。また、$\theta = \mathrm{GST} + \lambda_l - \alpha = \mathrm{LST} - \alpha$ である。一般に、干渉計は複数のアンテナで観測を行なうが、3 つ以上のアンテナを利用する場合でも 2 つのアンテナを利用する場合を拡張して考えれば良い。そこで、以下では 2 つのアンテナを使うことを考える。それぞれのアンテナの位置ベクトルを $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ とし、基線ベクトル $\boldsymbol{D}$ を $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1$ で定義する。基線ベクトルを異なる座標で表現した場合の関係式も上の式と同様に与えられる。

2.2　フリンジ

天体が点光源であり、ある単一周波数 ν_0 で放射している場合を考える。天体の単位方向ベクトルを $\boldsymbol{s}$ とおくと、それぞれのアンテナの間で幾何学的遅延が生じる。これを τ_g と表せば

$$\tau_g = \frac{1}{c} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{s} \tag{12}$$

と書ける。天体からの放射が $E(t) = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$ と書けるとき、それぞれのアンテナで受信する信号は

$$V_1(t) = a_1 E_0 \cos(2\pi\nu_0 t), \qquad V_2(t) = a_2 E_0 \cos(2\pi\nu_0 (t - \tau_g)) \tag{13}$$

となる。a_1, a_2 はアンテナの複素利得である。実際の観測では、幾何学的遅延を補正するファクター τ_i を入れた相互相関関数が出力される。すなわち

$$\begin{aligned} C_{12}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_1(t - \tau_i) V_2^*(t - \tau) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} a_1 a_2^* \left|E_0\right|^2 \cos(2\pi\nu_0(\tau - \tau_i + \tau_g)) \end{aligned} \tag{14}$$

であり、これより $C_{12}(\tau)$ は τ に関して振動することが分かる。これを図示したものをフリンジと呼び、フリンジは intensity に比例する。

2.3　クロスパワースペクトル

相互相関関数を τ について Fourier 変換するとクロスパワースペクトル $S_{12}(\nu)$ が得られる。

$$\begin{aligned} S_{12}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(\tau) \exp(-2\pi i \nu\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{4} a_1 a_2^* \left|E_0\right|^2 \delta(\nu - \nu_0) \exp(-2\pi i \nu_0 (\tau_i - \tau_g)) \end{aligned} \tag{15}$$

一般に、天体のスペクトルが $\hat{E}(\nu) = E_0(\nu)\exp(i\phi(\nu))$ であるとき、受信電圧は

$$V_1(t) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\nu)\exp[i(2\pi\nu t + \phi(\nu))]\,\mathrm{d}\nu, \qquad V_2(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\nu)\exp[i(2\pi\nu(t-\tau_g)+\phi(\nu))]\,\mathrm{d}\nu \tag{16}$$

と書け、相互相関関数とクロスパワースペクトルは

$$C_{12}(\tau) = a_1 a_2^* \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{\hat{E}(\nu)\hat{E}^*(\nu)}{T}\right] \exp(2\pi i\nu(\tau - \tau_i + \tau_g))\,\mathrm{d}\nu \tag{17}$$

$$S_{12}(\nu) = a_1 a_2^* E_0^2(\nu)\exp[-2\pi i\nu(\tau_i - \tau_g)] \tag{18}$$

となる。これを見ると明らかなように、クロスパワースペクトルには天体のパワースペクトルが保存されていることが分かる。

2.4 空間周波数

位相追尾中心 ($l = m = n = 0$) と天体の位置がずれている場合、位相の変化量 $\Delta\phi$ について考えてみる。

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial l}\Delta l \\
&= 2\pi\nu\frac{\partial\tau_g}{\partial l}\Delta l \\
&= \frac{2\pi\nu}{c}\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial l} \\
&= 2\pi\frac{D\cos\theta}{\lambda}\Delta l =: 2\pi u\Delta l
\end{aligned} \tag{19}$$

ここで導入した u は空間周波数と呼ばれ、一般的な周波数と対応して 1 rad あたりのフリンジの振動回数を表している。

2.5 重ね合わせの原理とビジビリティ

今までは天体を点光源としたが、一般の場合はどうなるだろうか。まず、点光源が 2 つある場合を考える。放射電圧の方向分布をそれぞれ $E_1(\nu)\delta(l - l_1),\ E_2(\nu)\delta(l - l_2)$ とする。遅延追尾が完璧であり、かつアンテナの複素利得が方向によらないとすれば、受信電圧は

$$V_1(t) = a_1(E_1(t) + E_2(t)), \qquad V_2(t) = a_2[E_1(t - (\tau_g + \tau_{g1})) + E_2(t - (\tau_g + \tau_{g2}))] \tag{20}$$

と書ける。よって、相互相関関数とクロスパワースペクトルは

$$\begin{aligned}
C_{12}(\tau) &= C_{12}^{(1)}(\tau) + C_{12}^{(2)}(\tau) \\
&= a_1 a_2^* \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{\hat{E}_1(\nu)\hat{E}_1^*(\nu)\exp(2\pi i u l_1) + \hat{E}_2(\nu)\hat{E}_2^*(\nu)\exp(2\pi i u l_2)}{T}\right] \exp(2\pi i\nu\tau)\,\mathrm{d}\nu
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
S_{12}(\nu) &= S_{12}^{(1)}(\nu) + S_{12}^{(2)}(\nu) \\
&= a_1 a_2^*[E_1^2(\nu)\exp(2\pi i u l_1) + E_2^2(\nu)\exp(2\pi i u l_2)]
\end{aligned} \tag{22}$$

となる。ただし、u は空間周波数である。一般に、点光源が N 個ある場合クロスパワースペクトルは

$$\begin{aligned}
S_{12}(\nu) &= \sum_{k=1}^{N} S_k(\nu) \\
&= a_1 a_2^* \sum_{k=1}^{N} E_k^2(\nu)\exp(2\pi i u l_k) \\
&= a_1 a_2^* \sum_{k=1}^{N} I_k(\nu, l)\exp(2\pi i u l_k)
\end{aligned} \tag{23}$$

と表される。連続的に分布している場合は

$$S_{12}(\nu) = a_1 a_2^* \int E^2(\nu, l) \exp(2\pi i u l)\,\mathrm{d}l$$
$$= a_1 a_2^* \int I(\nu, l) \exp(2\pi i u l)\,\mathrm{d}l \tag{24}$$

である。この式は $I(\nu, l)$ を Fourier 逆変換したものが $S_{12}(\nu)$ になることを示している。さらに、$S_{12}(\nu)$ が u にも依存していることを陽に示し $\mathcal{V}(\nu, u)$ と書いたとき、これをビジビリティと呼ぶ。

2.6 コヒーレンス

2 つの入力信号の間にどれだけ干渉性があるかを表す指標としてコヒーレンス (coherence) がある。

$$\mathrm{coh}(\nu) = \frac{|S_{12}(\nu)|}{\sqrt{S_{11}(\nu) S_{22}(\nu)}} \tag{25}$$

定義から $0 \le \mathrm{coh}(\nu) \le 1$ である。今、共通の信号 $s(t)$ と独立な雑音 $n_1(t)$, $n_2(t)$ が付加されたとすると

$$V_1(t) = a_1(s(t) + n_1(t)), \qquad V_2(t) = a_2(s(t) + n_2(t)) \tag{26}$$

が成り立つ。また、対応するスペクトルを

$$S_1(\nu) = a_1(S(\nu) + N_1(\nu)), \qquad S_2(\nu) = a_2(S(\nu) + N_2(\nu)) \tag{27}$$

とする。このとき、コヒーレンスは

$$\mathrm{coh}(\nu) = \frac{|a_1 a_2^*|}{|a_1|\,|a_2|} \frac{|S(\nu)\,|S^*(\nu)||}{\sqrt{[S(\nu)S^*(\nu) + N_1(\nu)N_1^*(\nu)][S(\nu)S^*(\nu) + N_2(\nu)N_2^*(\nu)]}} \tag{28}$$

となり、特に $N_1 = N_2 = 0$ のときを考え、$a = |a| \exp(i\phi)$ とおけば期待値が

$$\langle \mathrm{coh}(\nu) \rangle = |\langle \exp(i(\phi_1 - \phi_2)) \rangle| \tag{29}$$

のように表される。簡単な計算から、位相差が Gaussian のときはコヒーレンスも Gaussian で表される。

2.7 雑音の影響

今までは基本的に雑音の影響を考えてこなかったが、一般に信号より雑音のほうが支配的である。雑音を考えた場合の相互相関関数の期待値は

$$\langle C(\tau) \rangle = \langle (V_{\mathrm{N},1}(t) + V_{\mathrm{S},1}(t)) \cdot (V_{\mathrm{N},2}(t-\tau) + V_{\mathrm{S},2}(t-\tau)) \rangle$$
$$= \langle V_{\mathrm{S},1}(t) V_{\mathrm{S},2}(t-\tau) \rangle \tag{30}$$

となり雑音に依存しない。ところが、相互相関関数の分散を考えてみると簡単な計算から

$$\sigma_C^2 = \langle C^2(\tau) \rangle - \langle C(\tau) \rangle^2$$
$$= (\langle V_{\mathrm{N},1}^2(t) \rangle + \langle V_{\mathrm{S},1}^2(t) \rangle)(\langle V_{\mathrm{N},2}^2(t) \rangle + \langle V_{\mathrm{S},2}^2(t) \rangle) + \langle V_{\mathrm{S},1}(t) V_{\mathrm{S},2}(t-\tau) \rangle^2 \tag{31}$$

と雑音に依存することが分かる。すなわち、雑音は相互相関関数 (やクロスパワースペクトル、ビジビリティ) のゆらぎに影響してくる。

2.8　アンテナ温度とシステム雑音温度

システム雑音温度 T_{sys} とは、大気や受信機などで発生する雑音のパワーを温度で表したものである。これを天体の電波強度 (flux density) $S(\nu)$ と比較するためには、Boltzmann 定数 k を使ってアンテナ温度

$$T_{\mathrm{A}}(\nu) = \frac{S(\nu)A(\nu)}{2k} \tag{32}$$

に直したものと比較する。ただし、$A(\nu)$ は開口面積である。もしくは、逆にシステム雑音温度をシステム等価フラックス密度

$$\mathrm{SEFD} = \frac{2kT_{\mathrm{sys}}}{A} \tag{33}$$

に直して比較する。これらを用いるとビジビリティの信号雑音比 R_{sn} は

$$R_{\mathrm{sn}} = \frac{\mathcal{V}_\nu(u)}{\sqrt{(\mathrm{SEFD}_1 + S_1(\nu)) \cdot (\mathrm{SEFD}_2 + S_2(\nu)) + \mathcal{V}_\nu(u)}} \tag{34}$$

と書ける。

2.9　正規化相互相関関数とビジビリティ

今までは入力信号が振幅情報を失わないとして相互相関関数を計算してきた。だが、一般には入力信号の振幅は任意単位となることが多く、こうなると天体の輝度やフラックス密度がビジビリティの振幅に反映されなくなるのでは、と心配になる。しかし、多くの場合ビジビリティの振幅はフラックス密度に対して線形性を保つ。

2.10　Van Cittert-Zernike の定理

今までは 1 次元の輝度分布を考えてきたが、一般には天体の輝度分布は天球面上で 2 次元に広がっている。このとき、クロスパワースペクトルは $l \ll 1$, $m \ll 1$ であれば

$$S(\nu) = \iint a_1 a_2^* I_\nu(l,m) \exp[2\pi i(ul+vm)]\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}m \tag{35}$$

と書ける。ただし u, v は空間周波数である。u, v に依存していることをあらわに書けばこれはビジビリティにほかならず

$$\mathcal{V}_\nu(u,v) = \iint a_1 a_2^* I_\nu(l,m) \exp[2\pi i(ul+vm)]\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}m \tag{36}$$

となる。すなわち、複素ビジビリティをいろんな空間周波数で測定し、それを逆 Fourier 変換すれば天体の輝度分布が得られる。これを Van Cittert-Zernike の定理と呼ぶ。

2.11　uv coverage と合成ビーム

前節で述べたように、干渉計の出力であるビジビリティを逆 Fourier 変換することで天体の輝度分布が得られる。そのためには多くの (u,v) についてビジビリティが得られていなければならないが、現実には (u,v) の広がりには制限がある。uv 平面でビジビリティが得られている点の集合を uv coverage と呼ぶ。もう少し詳しく言えば、観測されるビジビリティ $\hat{\mathcal{V}}(u,v)$ が真のビジビリティ $\mathcal{V}(u,v)$ を用いて

$$\hat{\mathcal{V}}(u,v) = \mathcal{V}(u,v)U(u,v) \tag{37}$$

と表わされるとき、$U(u,v)$ を uv coverage と呼ぶ。また、この式を Fourier 変換すると、convolution 定理を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FT}[\hat{\mathcal{V}}(u,v)] &= \mathrm{FT}[\mathcal{V}(u,v)] ** \mathrm{FT}[U(u,v)] \\
&= I(l,m) ** B(l,m)
\end{aligned} \tag{38}
$$

となる。上式の $B(l,m)$ を合成ビームと呼ぶ。つまり、実際に得られる画像は真の輝度分布に合成ビームを畳み込んだものになっているということである。

2.12 アンテナ配置と uv coverage

地上基線による (u,v) の値は地球の自転によって時間変化し

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin(\mathrm{GST}+\lambda-\alpha) & \cos(\mathrm{GST}+\lambda-\alpha) & 0 \\ -\cos(\mathrm{GST}+\lambda-\alpha)\sin\delta & \sin(\mathrm{GST}+\lambda-\alpha)\sin\delta & \cos\delta \\ \cos(\mathrm{GST}+\lambda-\alpha)\cos\delta & -\sin(\mathrm{GST}+\lambda-\alpha)\cos\delta & \sin\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{pmatrix} \tag{39}
$$

という関係にある。時間変化するのは GST のみなので、(u,v,w) は 1 恒星日の周期で同じ値を繰り返す。上式から uv 平面で描かれる軌跡は

$$
u^2 + \left(\frac{v - (D_Z/\lambda)\cos\delta}{\sin\delta} \right)^2 = \frac{D_X^2 + D_Y^2}{\lambda^2} \tag{40}
$$

より楕円となる。アンテナ素子数が多いと uv coverage は密に埋まる。また、1 恒星日以上観測しても uv 平面での軌跡は変わらないので、多くの場合アンテナを移動して配列を変更し、新たな軌跡を描かせることで uv coverage を密にする。

2.13 重みつけ

理想的には uv coverage は連続的だが、実際は有限時間の間積分するので (u,v) は (u_i,v_i) と離散的になる。ここで、単純に各 (u_i,v_i) を足し合わせるのではなく、重みを付けて足し合わせることを考える。つまり

$$
U(u,v) = \sum W_i \delta(u-u_i, v-v_i) \tag{41}
$$

なる W_i を考える。

2.13.1 誤差

i 番目のビジビリティの標準偏差が σ_i のとき、$W_i \propto \sigma^p$ とする。p を Weighing Power と呼び、$p=-2$ のとき S/N が最大になる。

2.13.2 Density Weight

uv 平面で得られるビジビリティの密度は一定ではなく、短い基線で得られるビジビリティは密に、長い基線で得られるビジビリティは疎になる。$W_i = 1$ という重みつけを Natural Weight と呼び、天体に対する感度を最大にできる。ただし、この方法だとサイドローブレベルが低くなる一方、空間分解能が悪くなる傾向にある。一方、ビジビリティ点数 N_i に対して $W_i \propto 1/N_i$ とする重みつけを Uniform Weight と呼ぶ。この方法だと空間分解能は良くなるが、感度は低下しサイドローブレベルも増える。また、Natural Weight と Uniform Weight を両方取り混ぜた Robust Weight と呼ばれる重みつけもあり、これは密度の高い領域では Uniform に、低い領域では Natural に近くするというものである。

2.13.3 Taper

Taper は uv 平面上での原点からの距離に応じて重みを調整するものである。これによりサイドローブレベルを低減させたり、空間分解能をいろいろと変えて像合成ができる。よく用いられる関数形として Gaussian Taper がある。

$$W_i = \exp\left[-\left(\frac{u_i^2 + v_i^2}{2F^2}\right)\right] \tag{42}$$

ただし、F は W_i が $1/e$ に落ちる距離である。

2.14 グリッディングと視野

ビジビリティから輝度分布を得るために Fourier 変換が必要であるが、よく用いられるのが FFT である。FFT は高速に計算できるが、uv 平面上で格子点のデータが必要になる。得られる観測データは離散的ではあるが、一般には格子点の上には乗っていないのである種の補間作業が必要になってくる。これをグリッディングと呼ぶ。具体的には、適当な関数で観測されたビジビリティをたたみ込み、それを改めて格子点でサンプリングする。

$$\hat{\mathcal{V}}'(u,v) = \mathrm{III}^2\left(\frac{u}{\Delta u}, \frac{v}{\Delta v}\right)[c(u,v) ** U(u,v)\mathcal{V}(u,v)] \tag{43}$$

ここに出てくる、$\mathrm{III}^2(u/\Delta u, v/\Delta v)$ は 2 次元の Shah 関数と呼ばれ、δ 関数が格子間隔 $(\Delta u, \Delta v)$ で並んだ関数である。

$$\mathrm{III}^2\left(\frac{u}{\Delta u}, \frac{v}{\Delta v}\right) = \Delta u \Delta v \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^2(u - j\Delta u, v - k\Delta v) \tag{44}$$

Shah 関数の Fourier 変換は Shah 関数であることから、$\hat{\mathcal{V}}'(u,v)$ を Fourier 変換すると

$$\hat{I}'(l,m) = \mathrm{III}^2(l\Delta u, m\Delta v) ** \{\hat{c}(l,m)[B(l,m) ** I(l,m)]\} \tag{45}$$

となる。ここで、$\hat{c}(l,m)$ を視野外で 0 になるようにとれば、視野内での輝度分布が

$$\hat{I}(l,m) = \hat{c}(l,m)[B(l,m) ** I(l,m)] \tag{46}$$

のように表され、$\hat{c}(l,m)$ のファクターを除けば真の輝度分布と合成ビームの convolution になっている。

2.15 Deconvolution

干渉計で得られる像は真の画像に合成ビームを畳み込んだものになっている。ここから真の画像を推定するためには、単純には合成ビームで deconvolution すればよい。しかし、deconvlution の方法は一意ではない。というのもビジビリティが得られていない点でのビジビリティは任意であり、そのような点のビジビリティをどう推定しても dirty image は同じように再現できるからである。よく使われる deconvolution の手法を以下で紹介する。

2.15.1 CLEAN

CLEAN は電波干渉計の deconvolution アルゴリズムとして最も一般的に使われているものである。CLEAN では天体は点光源の集合であると考え、広がった構造を表現するために理想的な CLEAN ビームを convolution する。多くの場合、CLEAN ビームは合成ビームと同じ半値幅を持つ Gaussian が用いられる。

2.15.2 MEM

CLEAN 以外のアルゴリズムとして最大エントロピー法と呼ばれるものがある。これは、画像エントロピーと呼ばれる画像の良し悪しを評価する量を最大にし、雑音レベルの範囲内で観測データに一致するような像を

得る方法である。画像エントロピーにはいろいろな定義があるが、天体画像の特性と表現される式の特性がよく似ているようなものを用いる。この手法は CLEAN より計算時間は必要だが、広がった構造の天体の再生に優れている。

2.16 分解能

分解能は合成ビームの primary lobe の半値幅で規定される。uv coverage が

$$U(u,v) = \begin{cases} 1 & (|u| < u_{\max},\ |v| < v_{\max}) \\ 0 & (\text{others}) \end{cases} \tag{47}$$

と表わされるとき、合成ビームは

$$B(l,m) = \mathrm{Sinc}(2\pi u_{\max} l)\,\mathrm{Sinc}(2\pi v_{\max} m) \tag{48}$$

となる。これより、半値幅はおよそ $1/u_{\max}$, $1/v_{\max}$ 程度であることが分かる。