

スパース推定による 可視光とX線のラグ解析

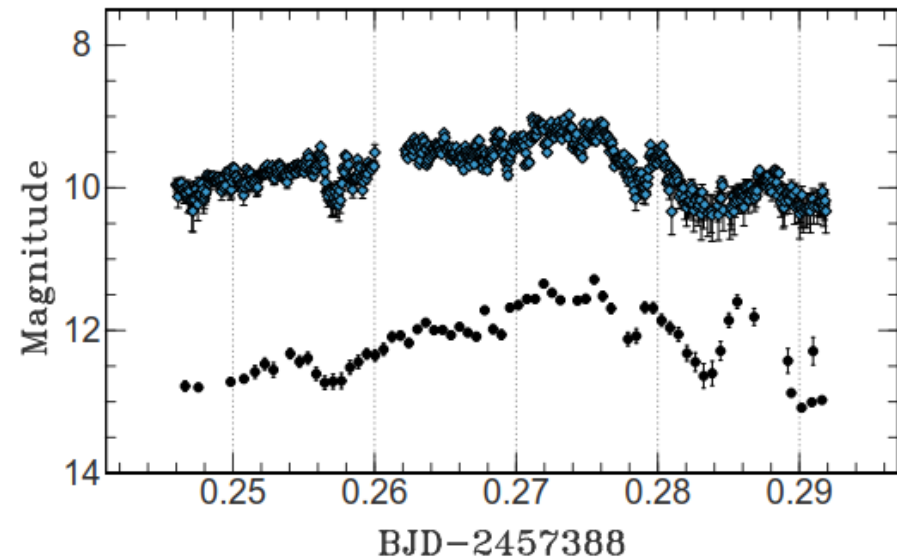
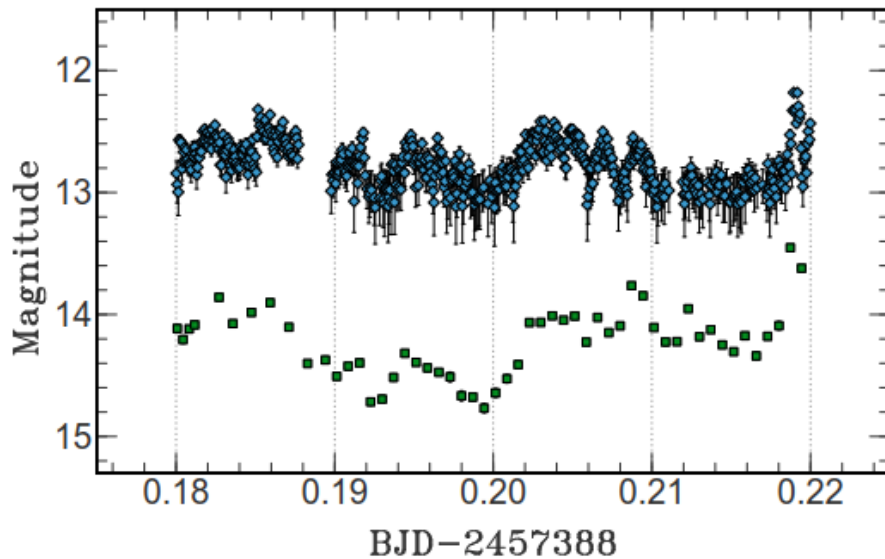
森井幹雄 統計数理研究所

池田思朗(統数研)、木邑真理子(京大)

「木曾シュミットシンポジウム 2017」
2017.07.06(木) 9:30 – 9:55, 木曾町文化交流センター

V404 Cyg

ブラックホールX線連星



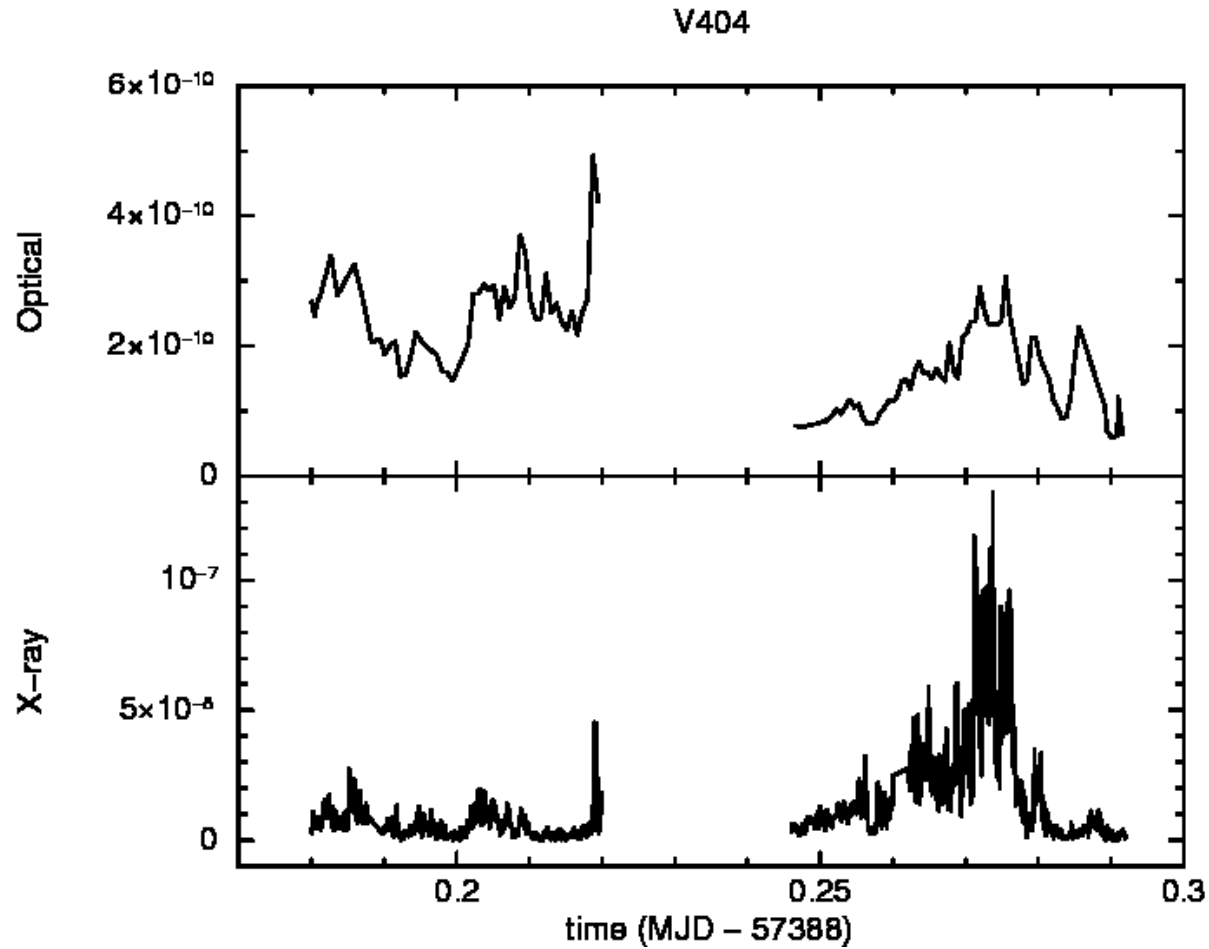
木邑真理子さん他の解析により、

30~50秒程度のX線変動の遅れ

→disk内での変動+accretion flow?

(野上大作さんの講演)

木邑さんから提供して頂いたデータ



目的

- 木邑さんの解析によると、V404は、可視光 (Opt)→X線(X-ray)の順に変動している。
- つまり、Lag が存在する。
- スパース推定のアプローチでLagの検証を行う。

方法

- 周波数空間上で、Opt. LCと X-ray LCの両方に存在する周波数成分を抽出する。
- Group LASSOを用いる。
- 計算を速くするために、FISTAを用いる。
- Opt. 成分の位相と、X-ray成分の位相を計算し、その位相差を求める(Lag)。
- Lag が正か負かを調べる。

1つのLCに対して位相を推定する方法

周波数空間で考えるので、基本は、Fourier 変換:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt,$$
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) df.$$

Light Curve: $h(t)$ は実数値関数なので、

$$h(t) = 2 \int_0^{\infty} [H_R(f) \cos(2\pi f t) + H_I(f) \sin(2\pi f t)] df$$

$$h(t) = 2 \int_0^{\infty} [H_R(f) \cos(2\pi ft) + H_I(f) \sin(2\pi ft)] df$$

$h(t)$: 観測されたLight curve

$h(t)$ から周波数空間の関数 $H_R(f)$ と $H_I(f)$ を推定する。

- 物理量 $h(t)$ が時刻 $t = t_1$ から t_N までの間に N 点観測されているとする。
- 観測時刻は必ずしも等間隔ではないとする。
- 周波数空間上: $f_{lo} \sim f_{up}$ の間だけにPowerがあると仮定する。
- 周波数空間を $M/2$ 個に等分割する。

$h(t_i)$ は以下のように近似できる。

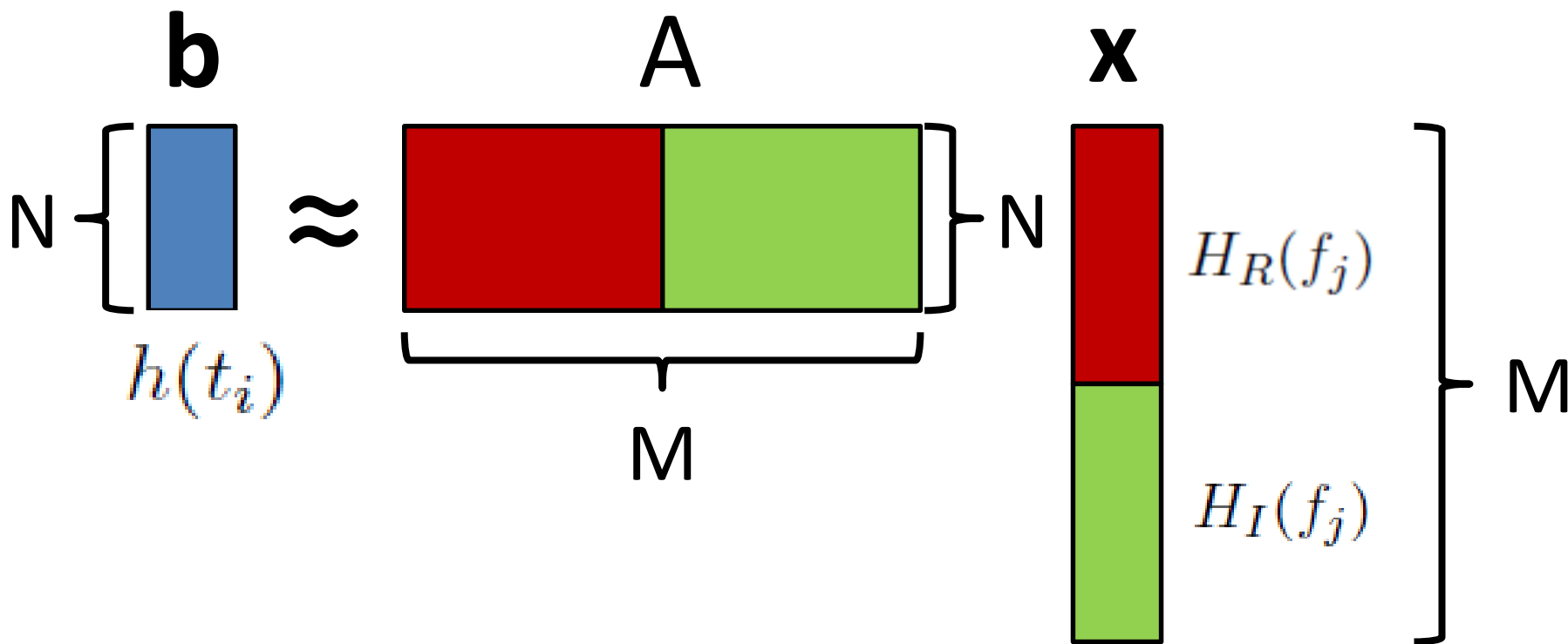
$$h(t_i) \approx 2\Delta f \sum_{j=1}^{M/2} [H_R(f_j) \cos(2\pi f_j t_i) + H_I(f_j) \sin(2\pi f_j t_i)]$$

$$\Delta f = 2(f_{up} - f_{lo})/M \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

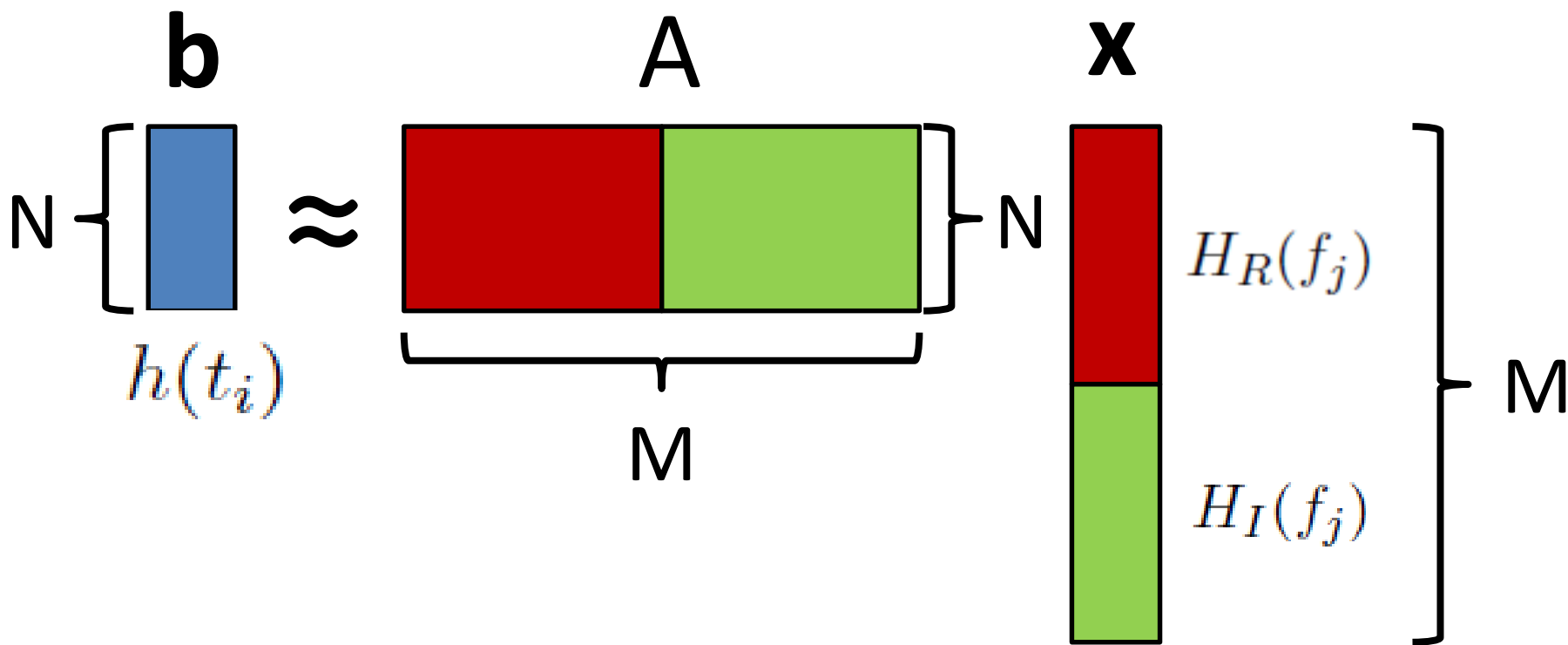
$$h(t_i) \approx 2\Delta f \sum_{j=1}^{M/2} [H_R(f_j) \cos(2\pi f_j t_i) + H_I(f_j) \sin(2\pi f_j t_i)]$$

$$(A)_{i,j} = 2\Delta f \cos(2\pi f_j t_i)$$

$$(A)_{i,M/2+j} = 2\Delta f \sin(2\pi f_j t_i)$$



\mathbf{b} , A は既知で、 \mathbf{x} を推定する問題



\mathbf{x} の解がスパースであると仮定してLASSOを用いる。
 同じ周波数(f_j)に対応する $H_R(f_j)$ と $H_I(f_j)$ は同時に
 ゼロまたは、非ゼロになってほしい。

Group LASSO:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2}$$

を最小化する。

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2}$$

これを速く解くために、FISTA (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm)を用いる。

A. Beck & M. Teboulle (2009) SIAM J. Imaging Sciences Vol.2, No.1, p183

FISTA with backtracking

Step 0. Take $L_0 > 0$, some $\eta > 1$, and $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Set $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_0, t_1 = 1$.

Step k. ($k \geq 1$) Find the smallest nonnegative integers i_k such that with $\bar{L} = \eta^{i_k} L_{k-1}$

$$F(p_{\bar{L}}(\mathbf{y}_k)) \leq Q_{\bar{L}}(p_{\bar{L}}(\mathbf{y}_k), \mathbf{y}_k).$$

Set $L_k = \eta^{i_k} L_{k-1}$ and compute

$$\mathbf{x}_k = p_{L_k}(\mathbf{y}_k),$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2},$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \right) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}).$$

Proximal Map

Nesterov の
加速

$$\begin{aligned}
p_L(\mathbf{y}) &= \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ g(\mathbf{x}) + \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x} - \left(\mathbf{y} - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{y}) \right) \right\|^2 \right\} \\
&= \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{M/2} l(x_j, x_{M/2+j}, z_j, z_{M/2+j}),
\end{aligned}$$

$$l(x, y, a, b) = \frac{L}{2} \left[(x - a)^2 + (y - b)^2 \right] + \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$$

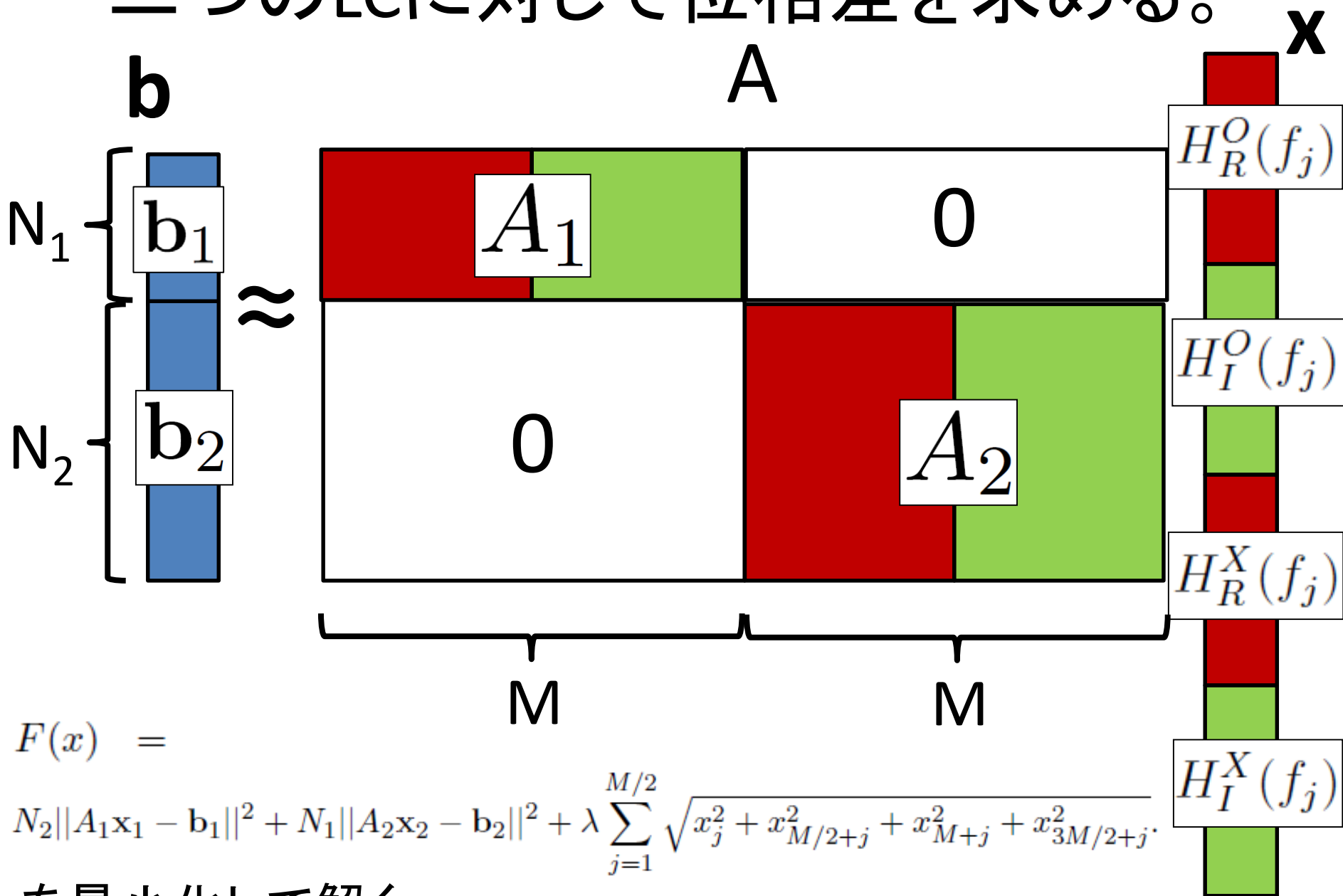
$$\arg \min_{x, y} l(x, y, a, b) = \frac{S_\lambda(L\sqrt{a^2 + b^2})}{L\sqrt{a^2 + b^2}} (a, b)^T$$

$$S_\lambda(x) = \begin{cases} x - \lambda & (\lambda < x) \\ 0 & (|x| \leq \lambda) \\ x + \lambda & (x < -\lambda) \end{cases}$$

位相は、以下の式で求める。

$$H_R(f_j) \cos(2\pi f_j t) + H_I(f_j) \sin(2\pi f_j t) = \sqrt{H_R(f_j)^2 + H_I(f_j)^2} \sin(2\pi f_j (t + \Delta t_j))$$

二つのLCに対して位相差を求める。



$$F(x) =$$

$$N_2 \|A_1 x_1 - \mathbf{b}_1\|^2 + N_1 \|A_2 x_2 - \mathbf{b}_2\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2 + x_{M+j}^2 + x_{3M/2+j}^2}$$

を最小化して解く。

$$F(x) =$$

$$N_2 \|A_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1\|^2 + N_1 \|A_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2 + x_{M+j}^2 + x_{3M/2+j}^2}$$

を最小化問題を、1個の LC の場合と同様にして解く。

$$H_R^O(f_j), H_I^O(f_j), H_R^X(f_j), H_I^X(f_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$H_R^O(f_j) \cos(2\pi f_j t) + H_I^O(f_j) \sin(2\pi f_j t) = \sqrt{H_R^O(f_j)^2 + H_I^O(f_j)^2} \sin(2\pi f_j(t + \Delta t_{O,j}))$$

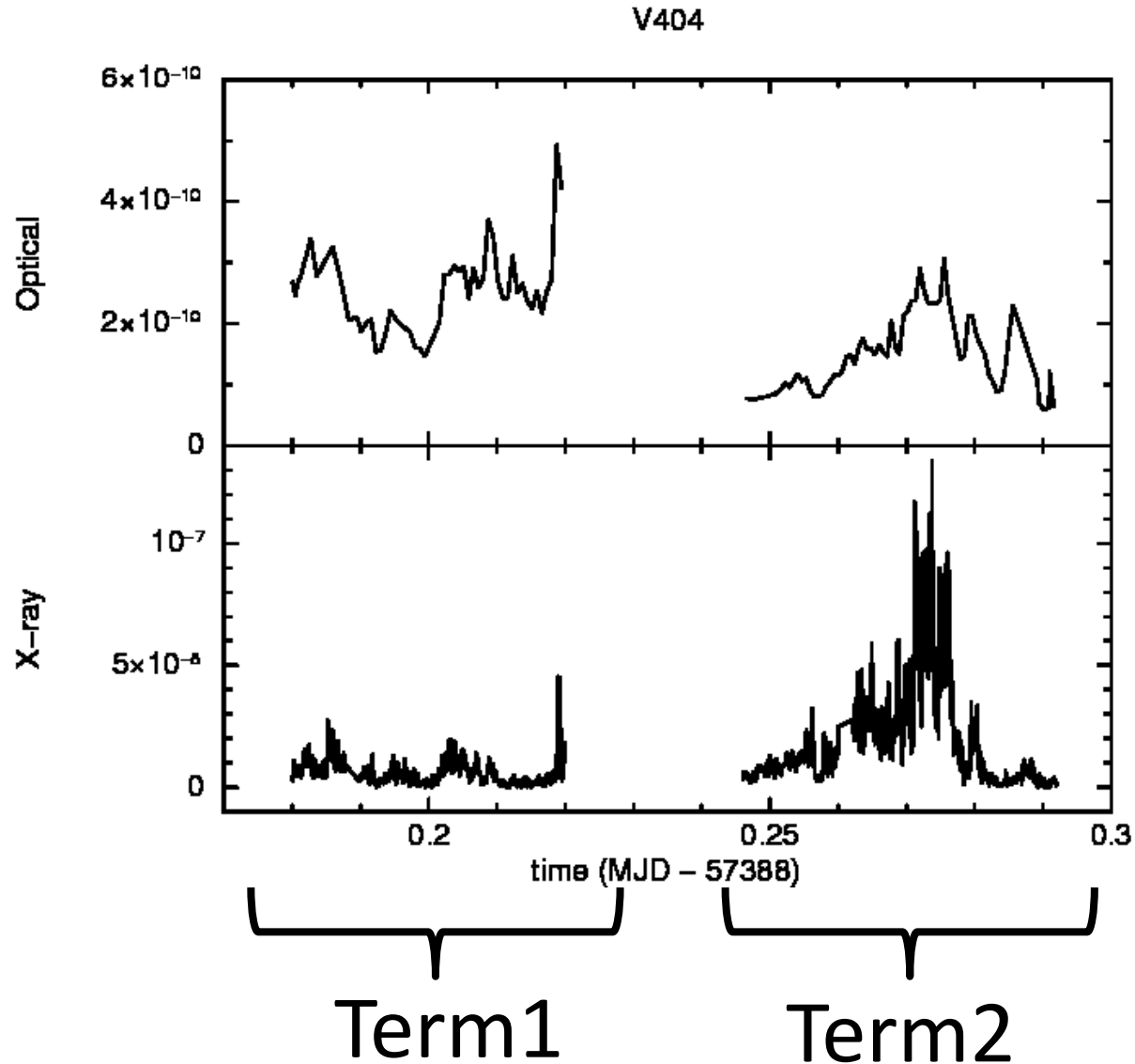
$$H_R^X(f_j) \cos(2\pi f_j t) + H_I^X(f_j) \sin(2\pi f_j t) = \sqrt{H_R^X(f_j)^2 + H_I^X(f_j)^2} \sin(2\pi f_j(t + \Delta t_{X,j}))$$



$$\Delta t_j = \Delta t_{O,j} - \Delta t_{X,j}$$

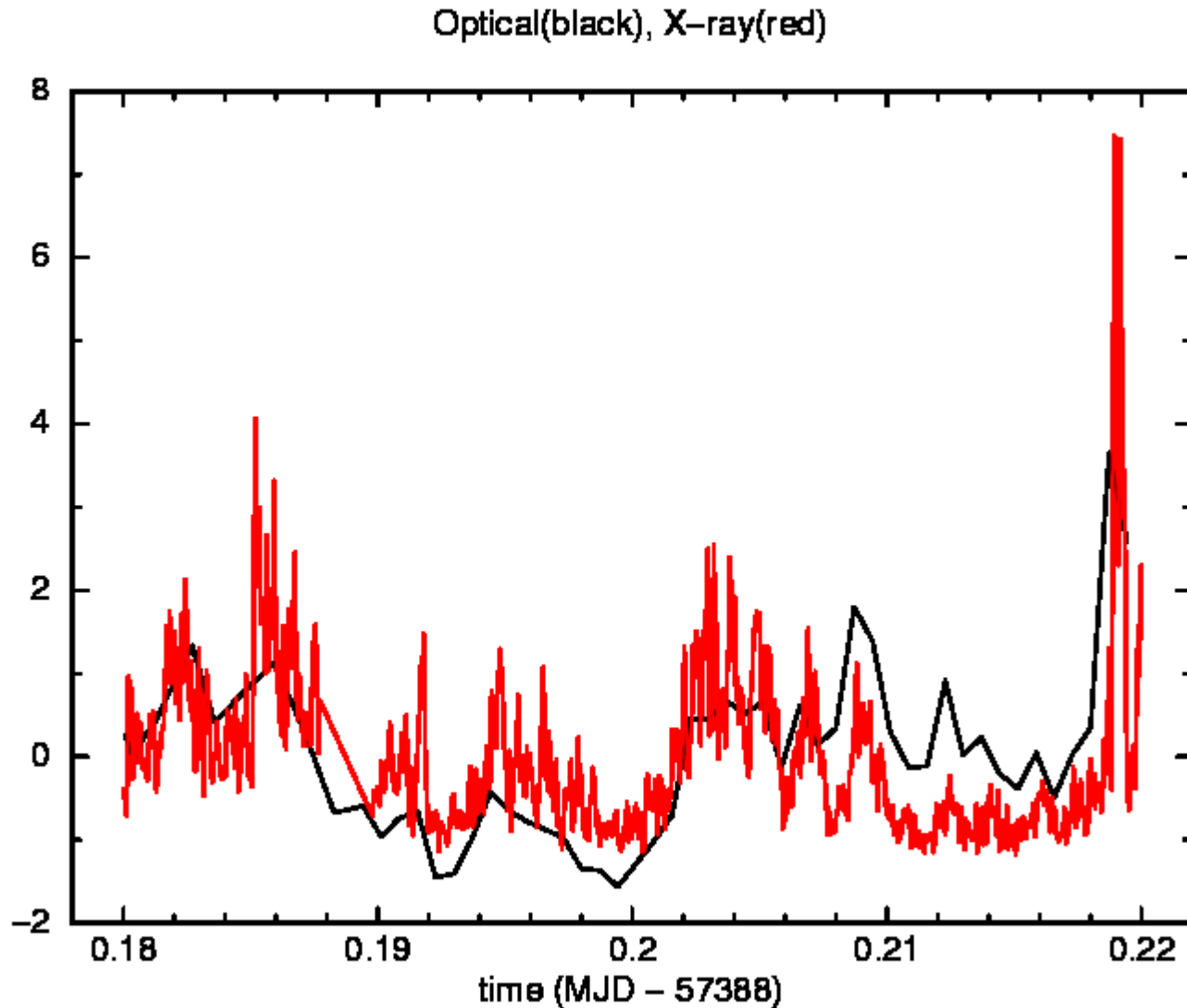
Opt \rightarrow X-ray の順に変動すると、 $\Delta t > 0$

木邑さんから提供して頂いたデータ



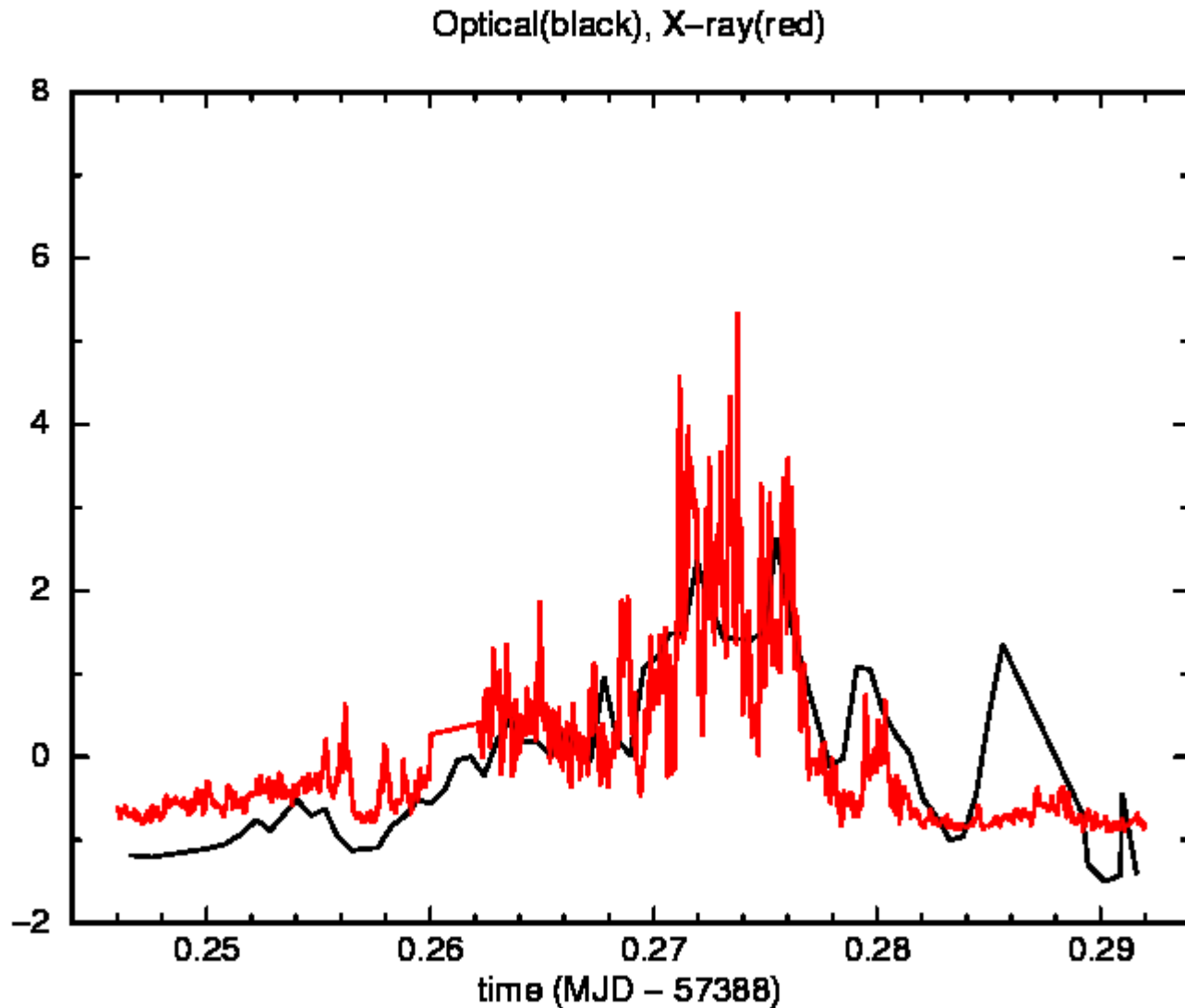
平均=0、標準偏差=1に標準化

Term 1



平均=0、標準偏差=1に標準化

Term 2



Cross Validation

正則化項の強さを調整するパラメータ: λ を決定するために、5-fold Cross Validation を行った。

時系列データをランダムに5分割し、4/5 をtraining data, 1/4をtest data と呼ぶことにする。

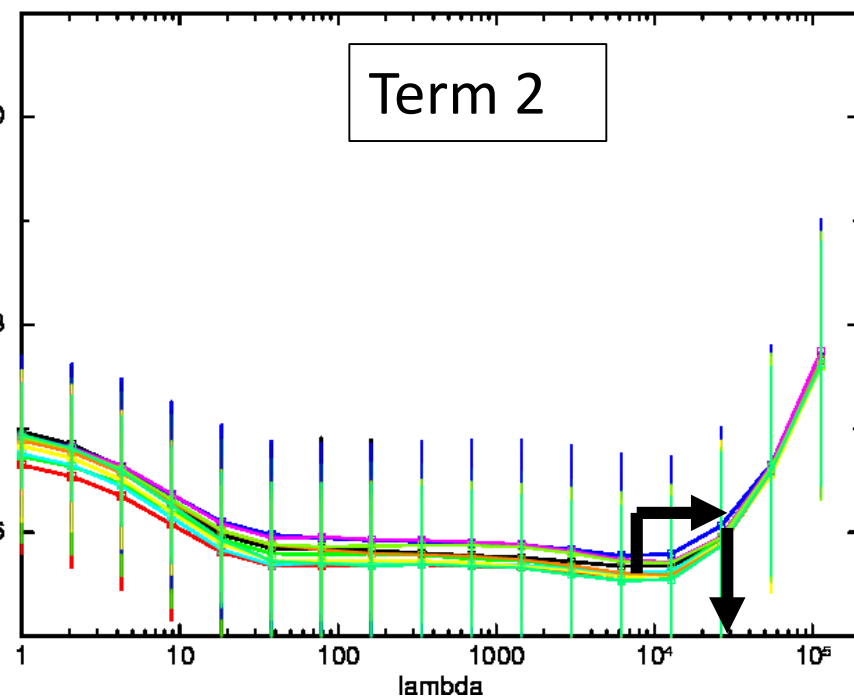
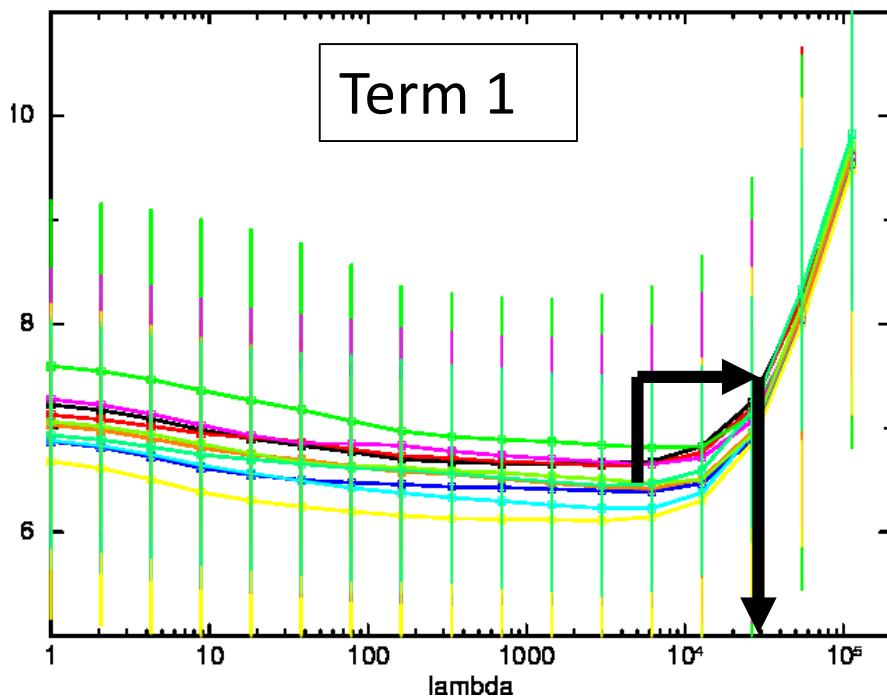
Training data で、 $F(x)$ の最適解を求める。それを元に LCを再構成し、test data からの残差を計算する。5つの残差に対する平均と標準偏差を計算し、プロットする。

Minimum + one-sigma rule を用いる。

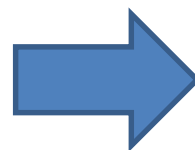
5-fold Cross Validation

5-fold Cross Validation (term2)

残差の平均



λ



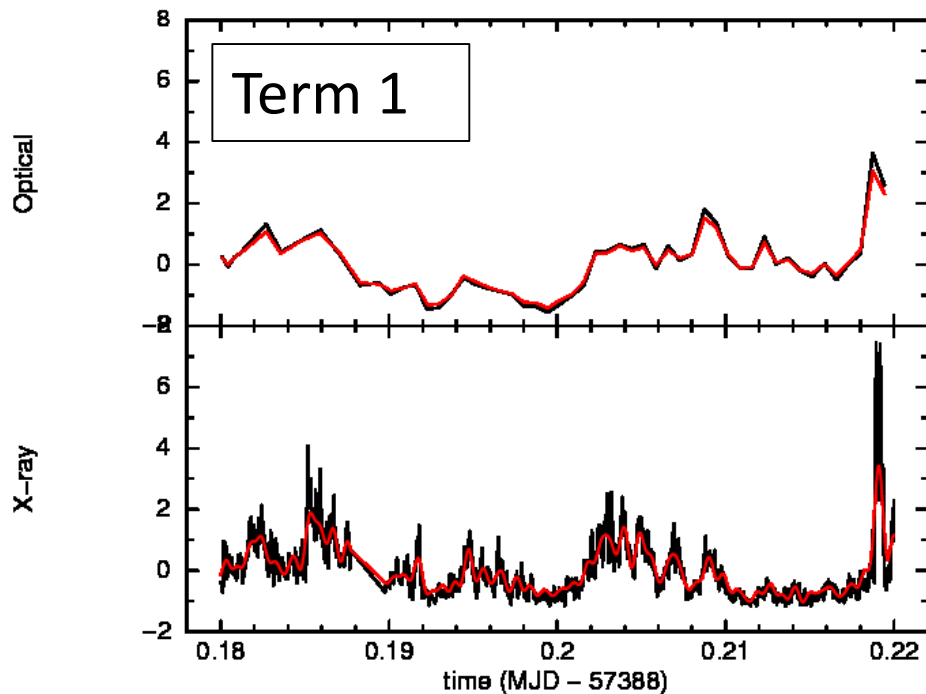
$\lambda = 3 \times 10^4$ とする。

元のLCと、再構成したLCとの比較

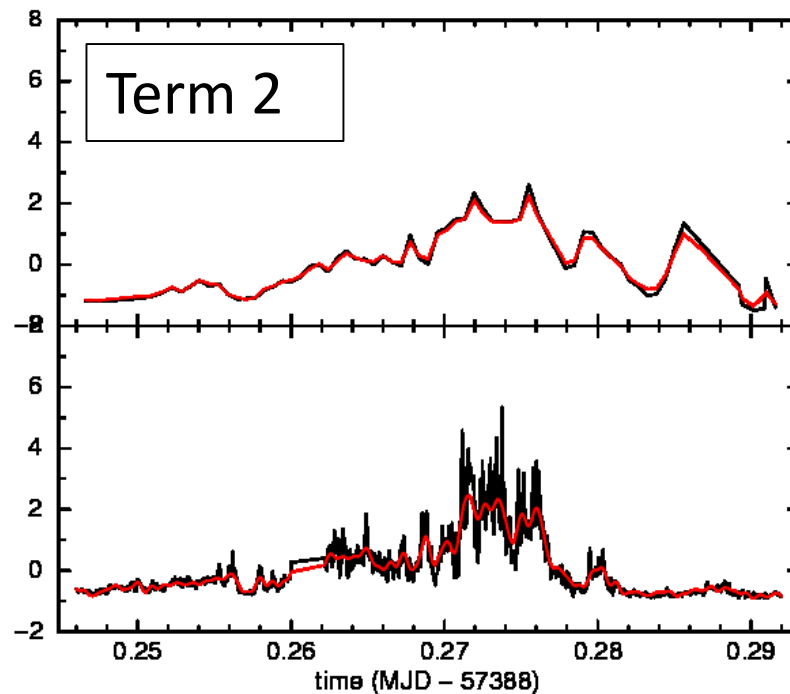
$\lambda = 3 \times 10^4$ に固定後、Group LASSOで解を求める。

$$F(x) = N_2 \|A_1 x_1 - b_1\|^2 + N_1 \|A_2 x_2 - b_2\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2 + x_{M+j}^2 + x_{3M/2+j}^2}$$

Original (black), Re-const (red)



Original (black), Re-const (red)

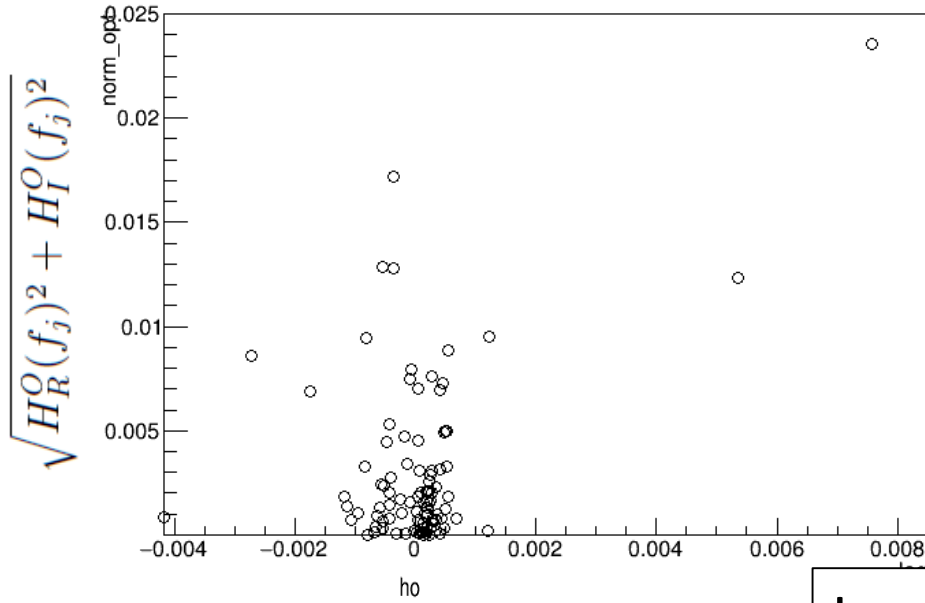


よく再構成できている。

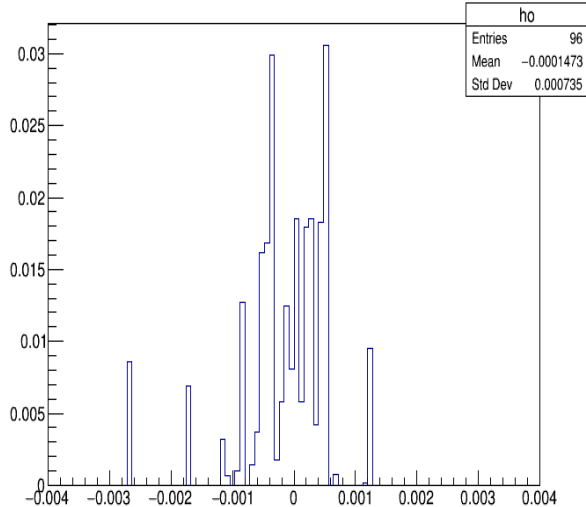
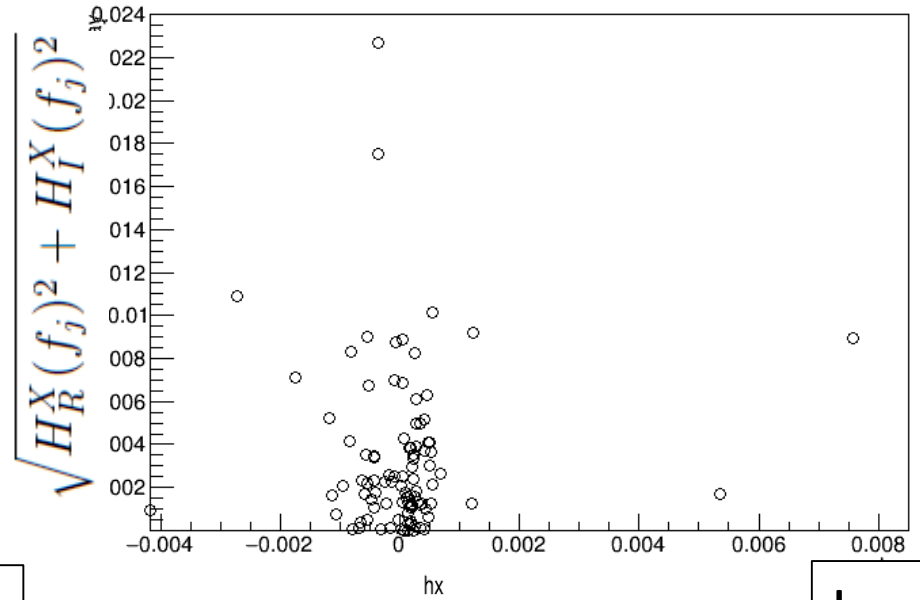
Term1: Power v.s. Lag

0.001 d = 86.4 sec

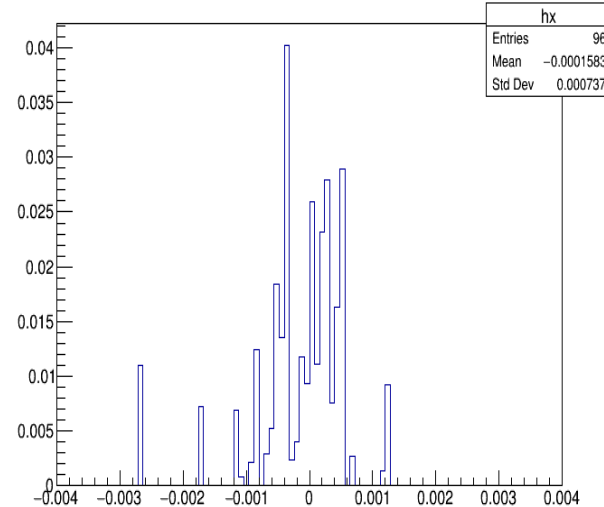
norm_opt:lag {period<0.04}



norm_xray:lag {period<0.04}



Lag

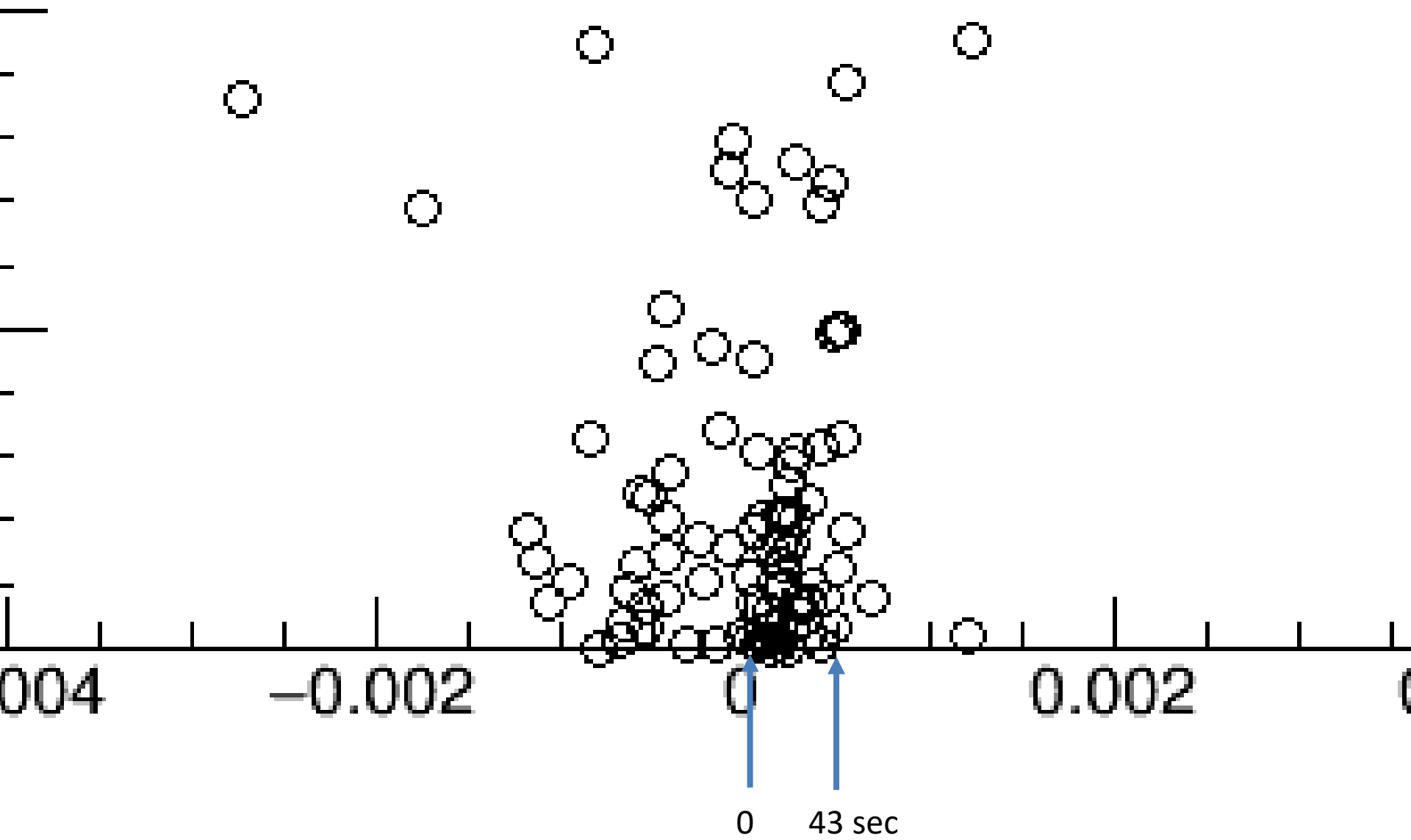


Lag

Lag

Lag は存在する？ 微妙。。。。

Lag

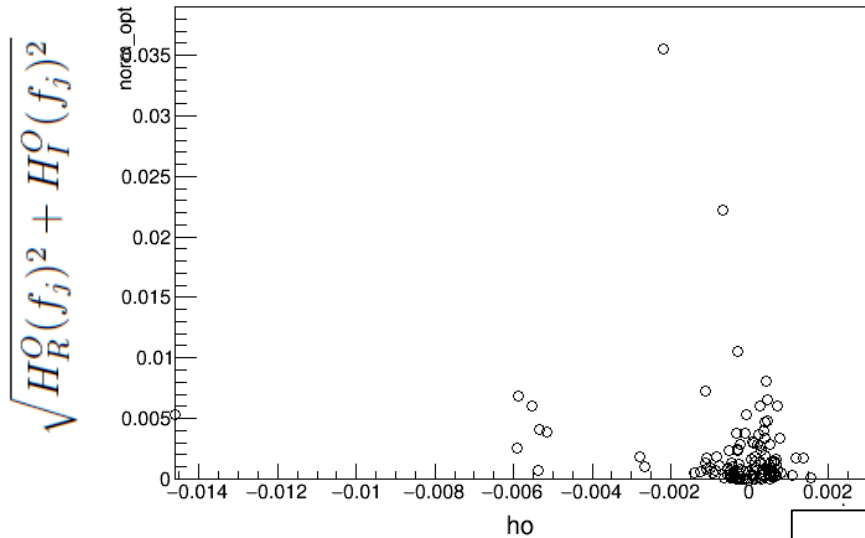


木邑さんの解析: 30 - 50 sec 遅れている

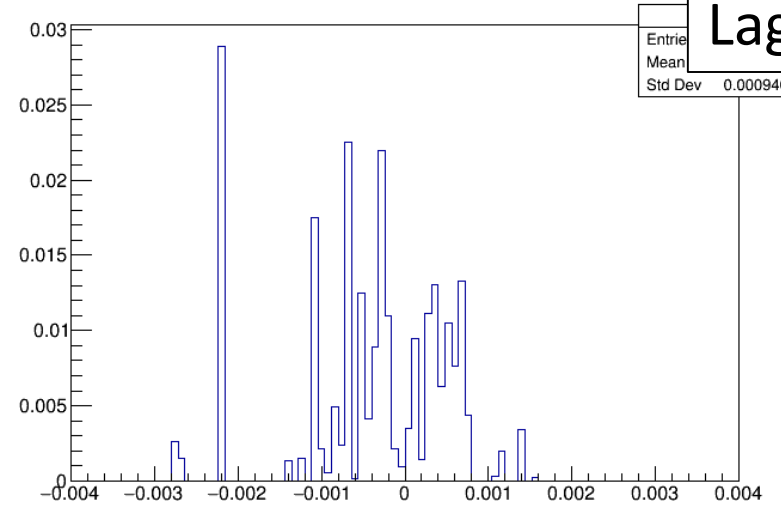
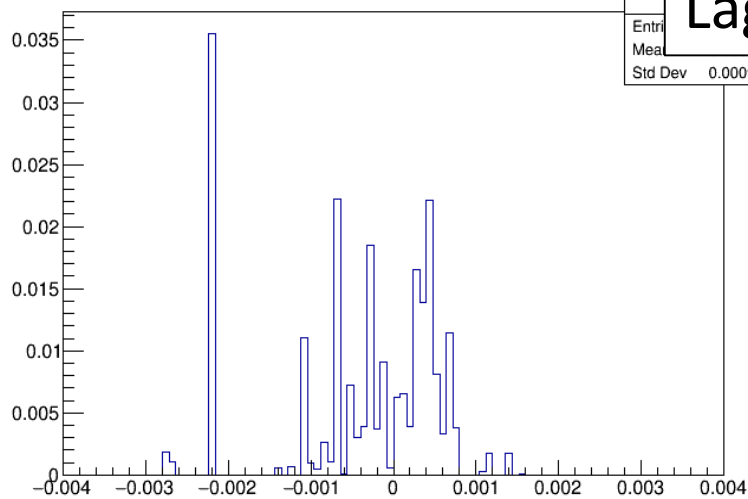
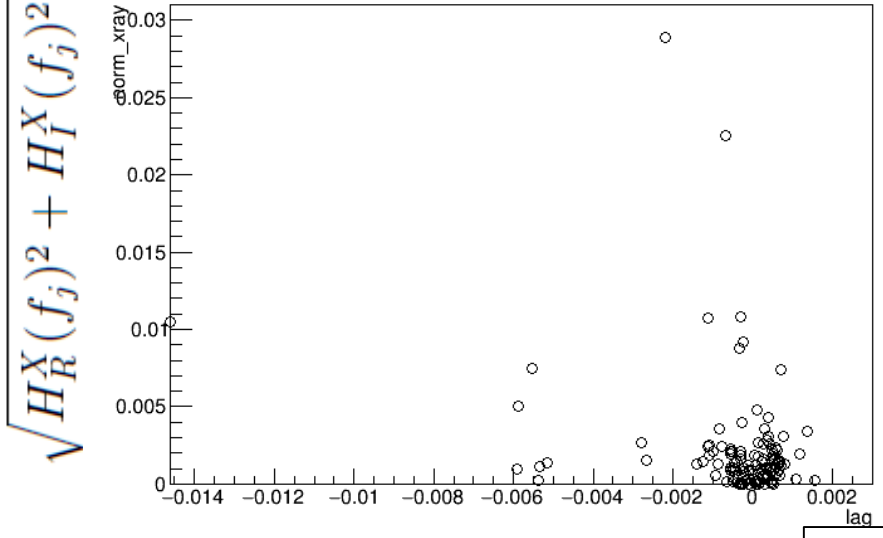
Term2: Power v.s. Lag

0.001 d = 86.4 sec

norm_opt:lag {period<0.04}



norm_xray:lag {period<0.04}



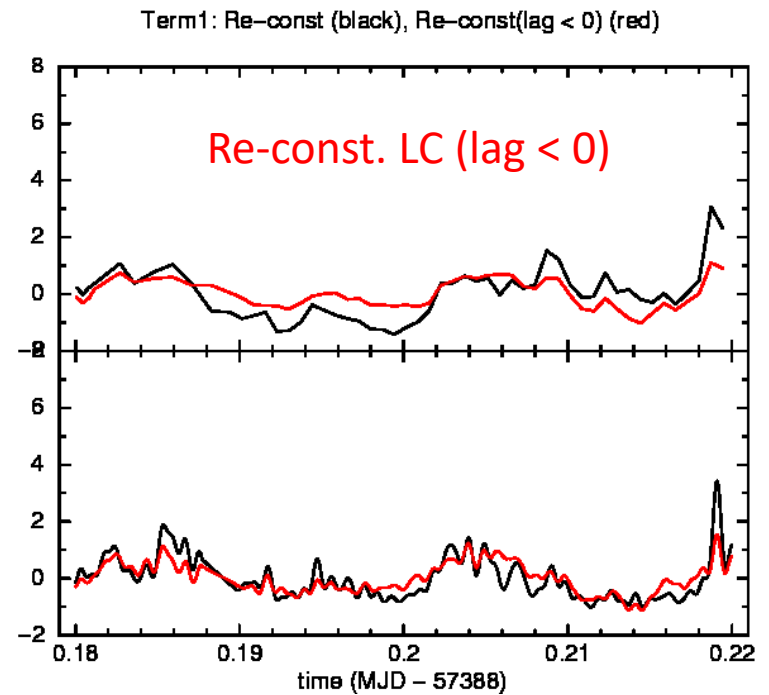
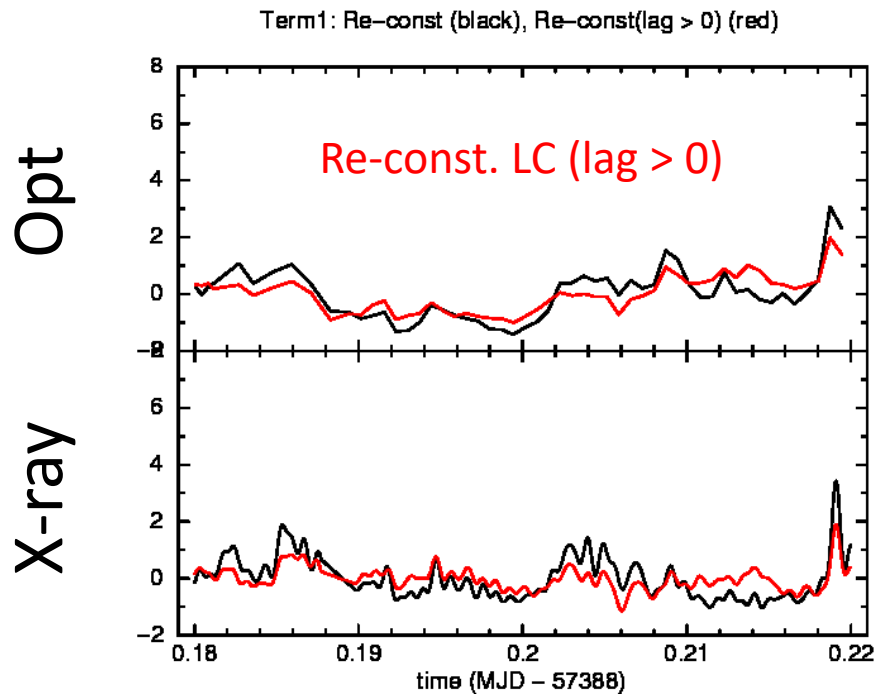
Lag

Lag は存在する？ 微妙。。。。

Lag

LCの再構成 (Lag > 0) (Lag < 0)

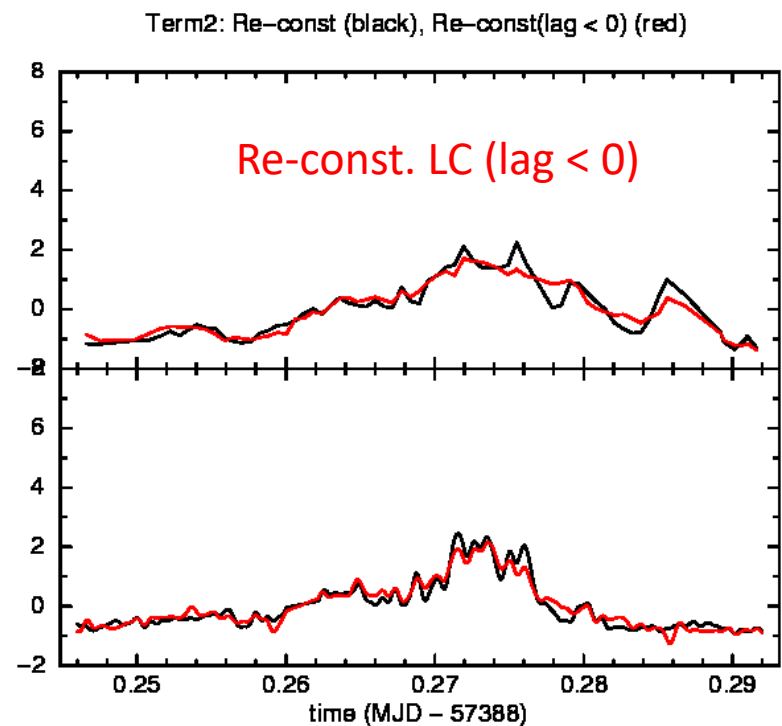
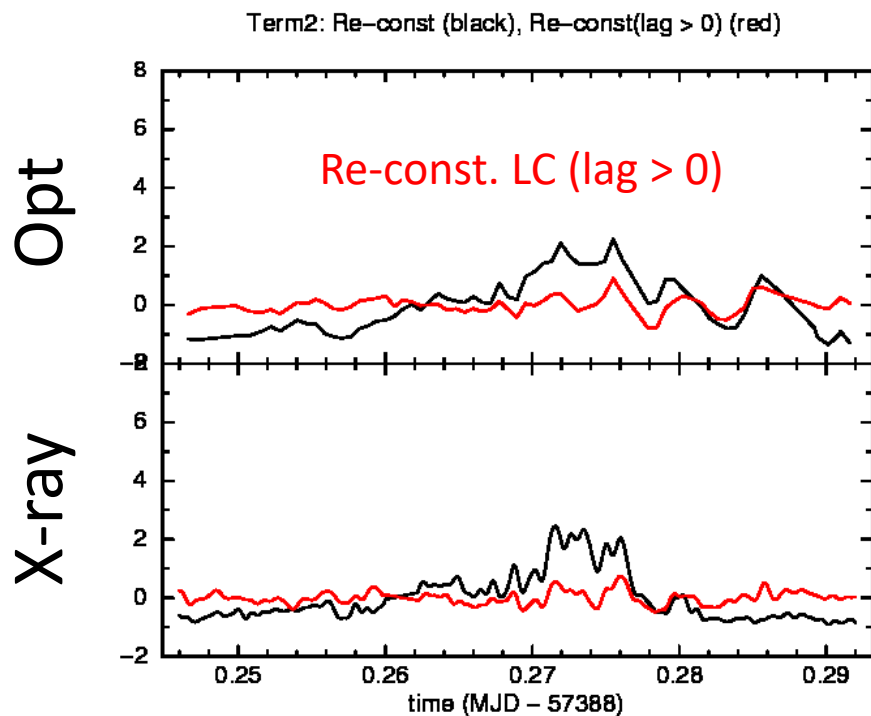
Term 1



Re-const. LC

LCの再構成 (Lag > 0) (Lag < 0)

Term 2

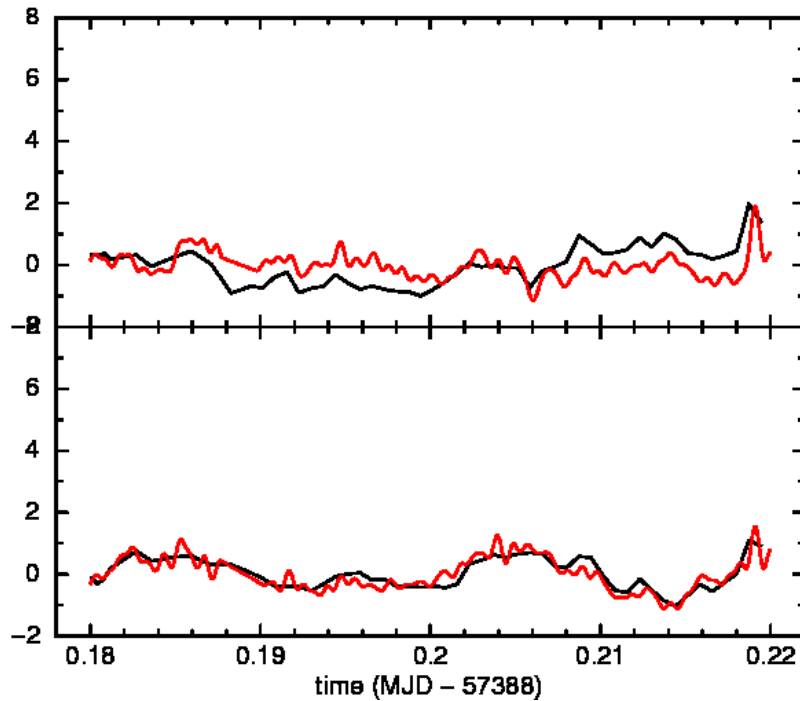


Lag < 0 の成分でおおよその形状が説明される。

Opt と X-ray の比較

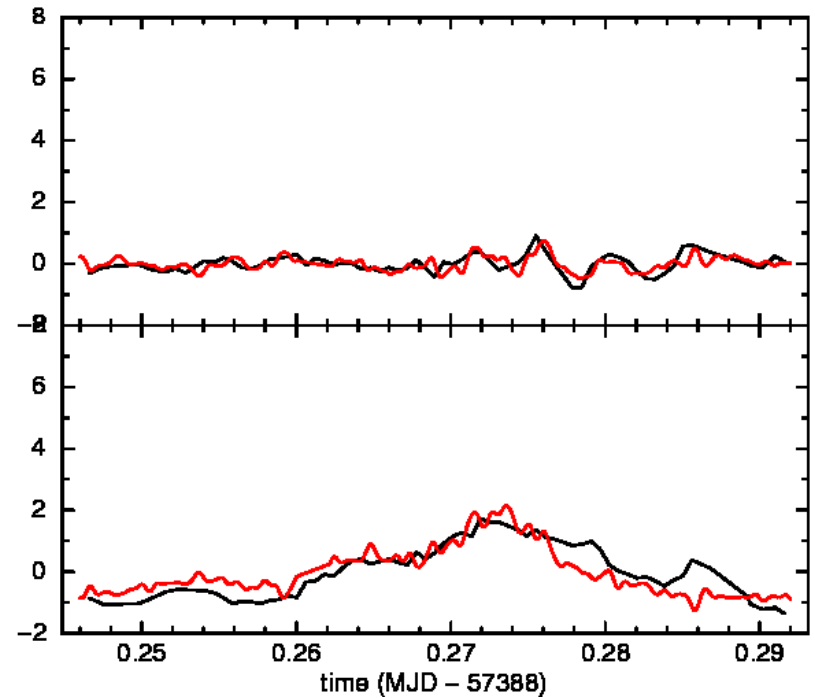
Term 1

Term1: opt(black), X-ray(red)



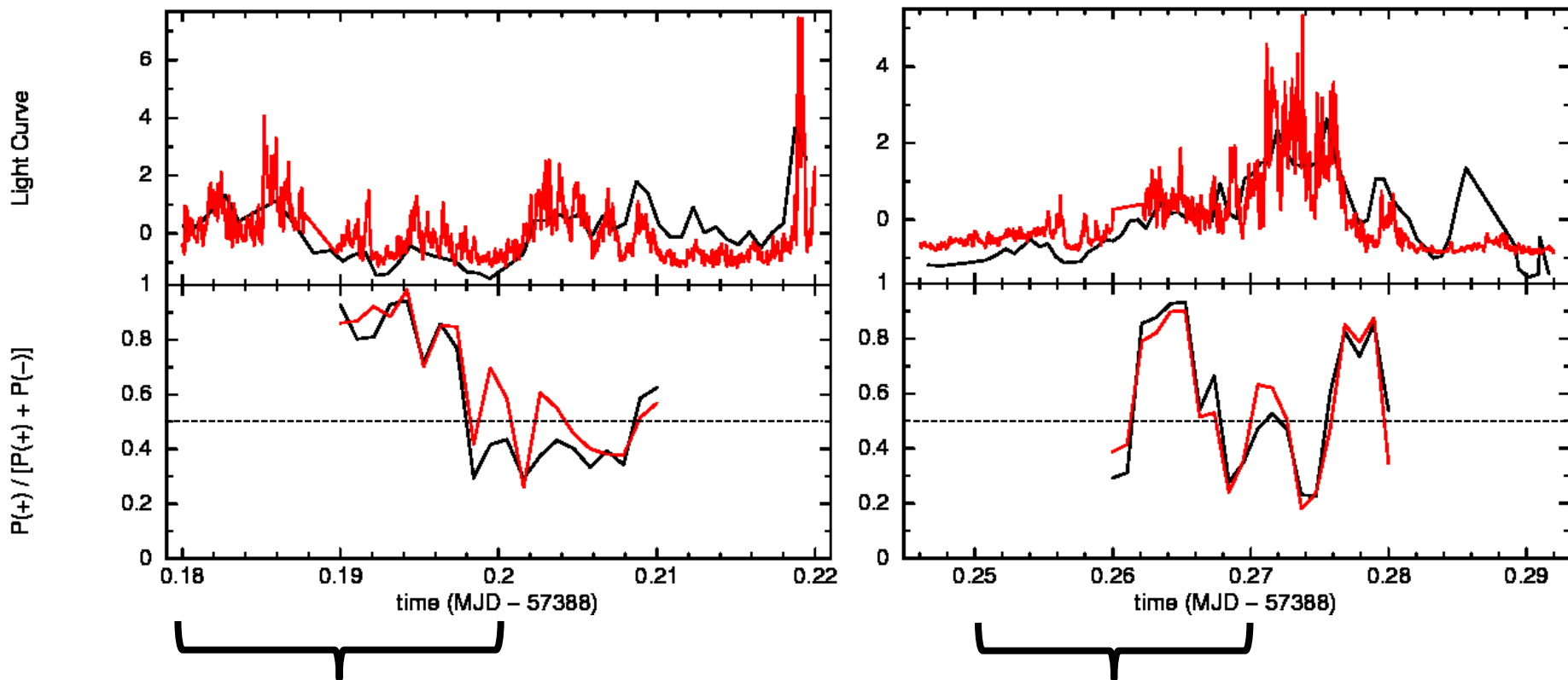
Term 2

Term2: opt(black), X-ray(red)



Sliding Window

Window をスライドさせて、各window 内でGroup LASSOによるLagの解析を行う。



Term1 の前半は $Lag > 0$ の成分が多いことが分かった。
Term2は $Lag > 0$ になったり < 0 になったり、バタバタしている。
暗い時に、 $Lag > 0$ で、明るい時にLag が無い。2成分？

まとめ

- 木邑さんから提供して頂いたV404の可視光とX線の同時観測のデータ解析を行った。
- Group LASSO を行い、可視光とX線で共通の成分を抽出し、それぞれ、位相を求め、時間差(Lag)を求めた。
- Term1, Term2全体に対して、Lag の存在を示そうとしたが、明確な結果は得られていない。
- 半分の時間幅のWindow をスライドさせながら、Window内で同様にLag検出の解析を行った。
- Term1 の前半で Opt → X-ray の順のLagが存在することを示唆する結果が得られた。
- それ以外の時間帯では、Lag > 0 になったり、Lag < 0になったり、時期によって、振る舞いが変動することが分かった。
- 暗い時に、Lag > 0 で、明るい時に、Lagが無いとも解釈できる。
2成分ある？

データの概要

表 1: Summary of data

term 1		
	optical	X-ray
t_{st} (MJD)	57388.18	57388.18
t_{ed} (MJD)	57388.22	57388.22
$t_{\text{ed}} - t_{\text{st}}$ (d)	0.039	0.040
f_{min} (d^{-1})	2.5e+01	2.5e+01
f_{max} (d^{-1})	2.9e+03	1.8e+04
f_{main} (d^{-1})	1.4e+03	1.7e+04
$N_{\text{f,main}}$	55	692
file	optlc-vband-term1.bjd	xraylc-5sec-term1.bjd
term 2		
	optical	X-ray
t_{st} (MJD)	57388.25	57388.25
t_{ed} (MJD)	57388.29	57388.29
$t_{\text{ed}} - t_{\text{st}}$ (d)	0.045	0.046
f_{min} (d^{-1})	2.2e+01	2.2e+01
f_{max} (d^{-1})	1.1e+04	1.8e+04
f_{main} (d^{-1})	1.7e+03	1.7e+04
$N_{\text{f,main}}$	75	796
file	optlc-iband-term2.bjd	xraylc-5sec-term2.bjd

Sliding Window

